

HÅLLFASTHETSLÄRA ÖVNINGSUPPGIFTER LÖSNINGAR

Datum: 2021-04-17

Lösningarna till övningsuppgifterna är ett levande dokument. Jag fyller på med lösningar, gör förbättringar och rättar de slarvfel som är svåra att undvika när man utvecklar material.

På YouTube kanalen, "EduME:s Övningsuppgifter i hållfasthetslära", finns inspelade lösningsförslag till många av uppgifterna. Flera uppgifterna finns även på spellistor med introducerande teori på olika avsnitt.

Det är fritt fram att använda detta material för dig som undervisar, men materialet ersätter inte en bra handledning av elever/studenter.

Häftet får inte editeras eller omarbetas.

Dela med dig av kanalen till dina studenter och/eller bädda in lämpliga videos på din lärplattform.

Jag använder mig att Karl Björks "Formler och Tabeller för Mekanisk konstruktion" när jag löser uppgifterna. Denna finns att beställa på bjorksforlag.se

En komplett översikt av kanalen och materialet finns på edume.nu

/Madeleine



<https://www.youtube.com/channel/UCZWty6uAUlkab9XyHQIAu9Q>



Madeleine Hermann

EduME – Education and Mechanical Engineering

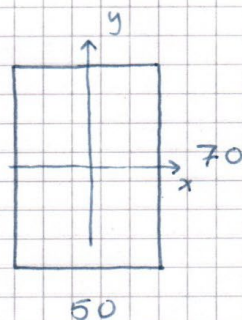
7, Böjspänningar

7.1

Böjspänningar

Sökt: a) $\sigma_{\max}$ om $M_x = 4,2 \text{ kNm}$
 b) $\sigma_{\max}$ om $M_y = 4,2 \text{ kNm}$

Trärsnitt



W_x ($b=50$ $h=70$) $\rightarrow$ NL KB

$$W_x = \frac{50 \cdot 70^2}{6} = 40833 \text{ mm}^3$$

W_y ($b=70$ $h=50$) $\rightarrow$ NL KB

$$W_y = \frac{70 \cdot 50^2}{6} = 29167 \text{ mm}^3$$

a)
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{40833 \text{ mm}^3} = 103 \text{ N/mm}^2 = \underline{\underline{103 \text{ MPa}}}$$

b)
$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{29167} = \underline{\underline{144 \text{ MPa}}}$$

Sökt: a) W_{min}

b) Val av IPE-balk om M_x resp M_y .

Given t:

$$n_s = 1,5$$

$$R_{eL} = 250 \text{ MPa}$$

KB s. 60

$$M = 15 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{till} = \frac{R_{eL}}{n_s} = \frac{250}{1,5} = 167 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

KB s. 25

$$a) \quad W_{min} = \frac{M}{\sigma_{till}} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{167} = 89820 \text{ mm}^3$$

$$W_{min} = \underline{\underline{89820 \text{ mm}^3}} = 89820 \cdot \frac{1}{10^3} = \underline{\underline{90 \text{ cm}^3}}$$

↑
enhetsexp.
mm per cm

b) KB. s. 65 IPE

$$W_x > W_{min} \quad \text{välj IPE 160} \quad W_x = 109 \text{ cm}^3$$

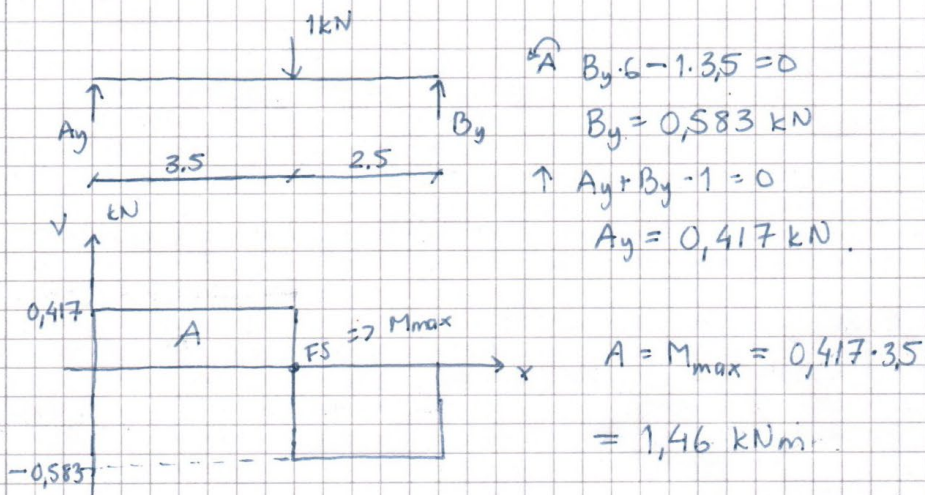
Böjning av stående profil I

$$W_y > W_{min} \quad \text{välj IPE 330} \quad W_y = 98,5 \text{ cm}^3$$

Böjning av liggande profil H (sragare)

a) $M_{\max}$ b) $\sigma_{\max}$

a) V- & M-diagram är ett sätt



$$\underline{M_{\max} = 1,46 \text{ kNm}}$$

$M_{\max}$ kan även bestämmas med Fall 6 KB s.29.

$$M_{\max} = F \cdot \frac{ab}{L} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3,5 \text{ m} \\ b = 2,5 \text{ m} \\ L = 6 \text{ m} \end{array} \right. \quad M_{\max} = \frac{3,5 \cdot 2,5 \cdot 1}{6} = \underline{1,46 \text{ kNm}}$$

b) IPE 100

$$\text{KB s.65} \Rightarrow W_x = 34,2 \text{ cm}^3$$

$$W_x = 34,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1,46 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{34,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 42,7 \text{ MPa} = \underline{43 \text{ MPa}}$$

KB s.25

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

Sökt: n_s

Givet: VKR 100x50x5 KB s. 67 $\Rightarrow W_x = 34 \text{ cm}^3$
 S355JR $\Rightarrow$ KB s. 50 $\Rightarrow R_{eL} = 300 \text{ MPa}$

Bestäm $M_{\max}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

KB s. 25

$M_A = M_{\max}$ "inses att maxmoment
 är i infästning mot väggen"
 (längst hävarmar)

$$M_{\max} = M_A = 1,0 \cdot 1,5 + 1,2 \cdot \frac{1,5}{2} = 2,4 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2,4 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{34 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 70,6 \text{ MPa}$$

$$n_s = \frac{R_{eL}}{\sigma_{\max}} = \frac{300}{70,6} = \underline{\underline{4,25}}$$

Sökt: σ_A, σ_B

Givet: $M_x = 3 \text{ kNm}$

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot e$$

Denna uttrycks ej
bra i KB, se förel.
eller litteratur.

Tvärssnitt

Bestäm I_x



Alla delytors tp går genom NL. $\Rightarrow$

inget Steinersats tillägg $A \cdot a^2$ ty $a=0$

$$I_x = \frac{120 \cdot 60^3}{12} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 36^4}{64} = 1995104 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

KB.s.27

$$\sigma_A \quad e = y_{\max} = 30 \text{ mm}$$

$$\sigma_A = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{3 \cdot 10^6}{1995104} \cdot 30 = \underline{45 \text{ MPa}} \quad (\text{drag})$$

$$\sigma_B \quad e = 18 \text{ mm}$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot e = \frac{3 \cdot 10^6}{1995104} \cdot 18 = \underline{27 \text{ MPa}} \quad (\text{tryck})$$

dubbelpil =
högerhandsregel

Sökt: a) σ_{max}^x b) σ_{max}^y

Givet: $M = 300 \text{ Nm}$

Tvårsnitt

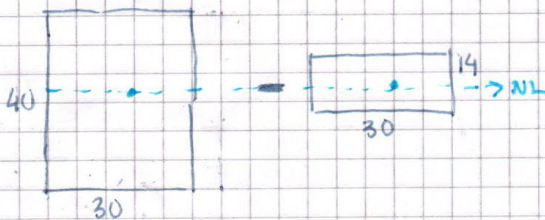
Bestäm I_x , I_y

Försök alltid förenkla genom att minska användning av Steiners sats.

$$I = \sum (I_0 + A \cdot a^2)$$

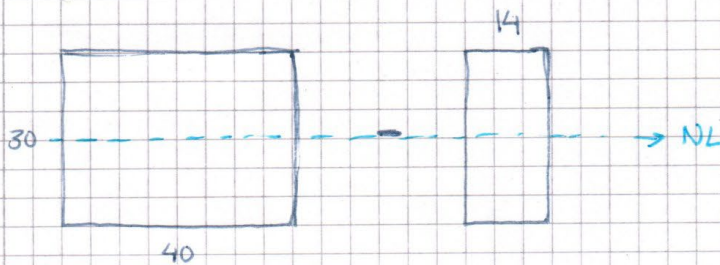
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

I_x



$$I_x = \frac{30 \cdot 40^3}{12} - \frac{30 \cdot 14^3}{12} = 153140 \text{ mm}^4$$

I_y



$$I_y = \frac{40 \cdot 30^3}{12} - \frac{14 \cdot 30^3}{12} = 58500 \text{ mm}^4$$

$$a) \quad \sigma_{\max}^x = \frac{M}{I_x} \cdot y_{\max} \quad y_{\max} = \frac{40}{2} = 20 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \cdot e_{\max}$$

KB. 5.25

$$\sigma_{\max}^x = \frac{300 \cdot 10^3}{153140} \cdot 20 = \underline{\underline{39,2 \text{ MPa}}}$$

$$b) \quad \sigma_{\max}^y = \frac{M}{I_y} \cdot x_{\max} \quad x_{\max} = \frac{30}{2} = 15 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\max}^y = \frac{300 \cdot 10^3}{58500} \cdot 15 = 76,9 \text{ MPa}$$

c) Tvärsnitt utan hål.

$$I_x^{\square} = \frac{30 \cdot 40^3}{12} = 160\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_y^{\square} = \frac{40 \cdot 30^3}{12} = 90\,000 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max}^{x \square} = \frac{300 \cdot 10^3}{160\,000} \cdot 20 = 37,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^{y \square} = \frac{300 \cdot 10^3}{90\,000} \cdot 15 = 50 \text{ MPa}$$

Ökning av spänning vid hålet

Böjning kring x-axel $\frac{39,2}{37,5} = 1,045 \Rightarrow +4,5\%$

— || — y-axel $\frac{76,9}{50} = 1,54 = +54\%$

Reflektion: Det är inte så allvarligt att plocka bort material vid NL (låg signa), se böjning kring x-axel.

Sökt: M_x

Givet: $\sigma_{\text{till}} = 120 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{I} \cdot e_{\text{max}}$$

$$I = \sum (I_0 + Aa^2)$$

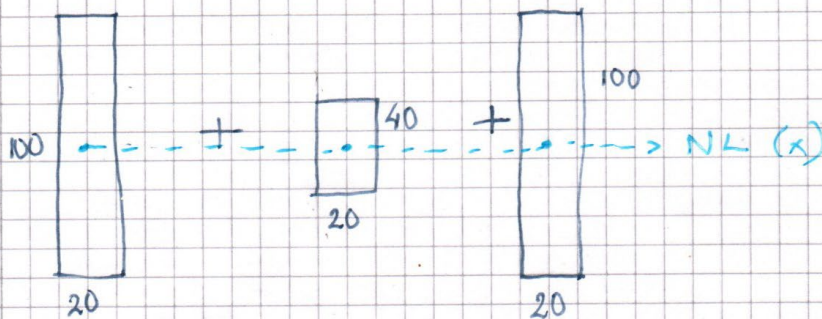
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

KB 5.25 s 5.27

Tvårsnitt

Bestäm I_x

Undvik Steiners sats genom indelningen



$$I_x = \frac{20 \cdot 100^3}{12} \cdot 2 + \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 3\,440\,000 \text{ mm}^4$$

$$M_x = I_x \cdot \sigma_{\text{till}} = 3\,440\,000 \cdot 120 = 412\,800\,000 \text{ Nmm}$$

$$M_x = 412,8 \text{ kNm}$$

Sökt: $\sigma_{\max}^+$, $\sigma_{\max}^-$

M_b ger $\sigma_{\max}^+$ på ovansidan och $\sigma_{\max}^-$ på undersidan.

Trärsnitt

Bestäm $t_p \Rightarrow NL$

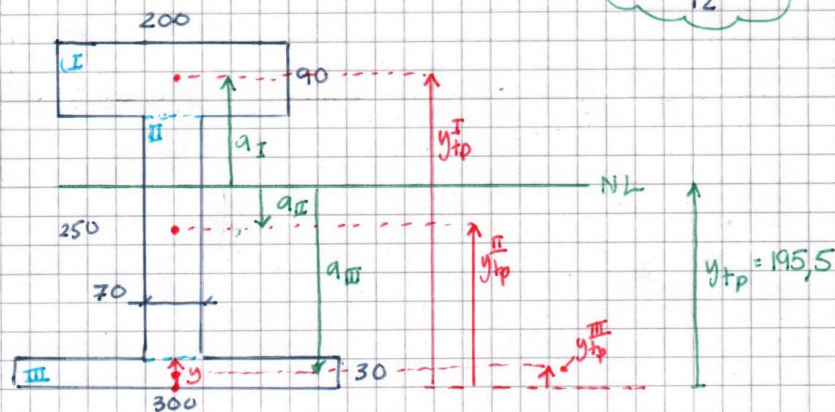
a -mått bestäms från NL

$KB \approx 25$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot e_{\max}}{I}$$

$$I = \sum (I_0 + A \cdot a^2)$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$



	A_n	y_{tp}^n	$A_n \cdot y_{tp}^n$	I_0	a_n	$A \cdot a_n^2$
I	$200 \cdot 90 = 18000$	325	$5,85 \cdot 10^6$	$\frac{200 \cdot 90^3}{12} = 12,15 \cdot 10^6$	$325 - y_{tp} = 129,5$	301864500
II	$250 \cdot 70 = 17500$	155	2712500	$\frac{70 \cdot 250^3}{12} = 91,14 \cdot 10^6$	$y_{tp} - 155 = 40,5$	28704375
III	$300 \cdot 30 = 9000$	15	135000	$\frac{300 \cdot 30^3}{12} = 675000$	$y_{tp} - 15 = 180,5$	293222250
Σ	44500	/	8697500	103970833	/	623791125

I_x (nästa sida)

$$y_{tp} = \frac{\sum A y_{tp}}{\sum A} = \frac{8697500}{44500} = 195,5 \text{ mm}$$

$$I_x = \sum (I_o + Aa^2) = \sum I_o + \sum Aa^2 \quad (\text{använd summorna i kolumnerna})$$

$$I_x = 103970833 + 623791125 = 727761958 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max}^+$$

$$e^+ = 250 + 30 + 90 - 195,5 = 174,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M_b}{I_x} \cdot e^+ = \frac{90 \cdot 10^6}{727761958} \cdot 174,5 = 21,6 \text{ MPa (drag)}$$

$$\sigma_{\max}^-$$

$$e^- = 195,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M_b}{I_x} \cdot e^- = \frac{90 \cdot 10^6}{727761958} \cdot 195,5 = 24,2 \text{ MPa (tryck)}$$

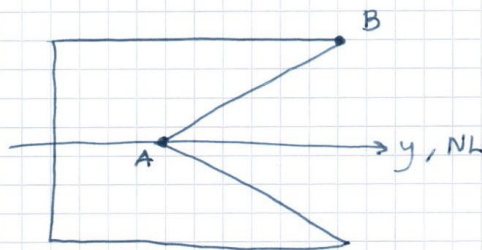
a) Spänning i A & B

$$\sigma_A = \frac{M}{I_x} \cdot y_A = \frac{35 \cdot 10^6}{12277369} (51,05 - 30) = 2,9 \text{ MPa} \quad (\text{tryck})$$

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot e$$

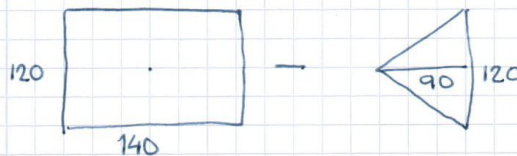
KB 5.25
(men lite dåligt
visat)

$$\sigma_B = \frac{M}{I_x} \cdot y_B = \frac{35 \cdot 10^6}{12277369} \cdot (140 - 51,05) = 253 \text{ MPa} \quad (\text{drag})$$



$$\sigma_A = 0 \text{ ty NL}$$

$$I_A = \frac{bh^3}{48}$$



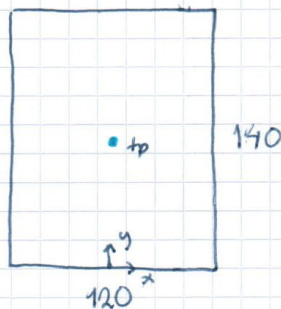
$$I_y = \frac{140 \cdot 120^3}{12} - \frac{90 \cdot 120^3}{48} = 16920000 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_B = \frac{35 \cdot 10^6}{I_y} \cdot x_B = \frac{35 \cdot 10^6}{I_y} \cdot 60 = 124 \text{ MPa} \quad (\text{drag})$$

Sökt: $\sigma_A = \sigma_B$ vid för fall a) = b)

Tyngdpunkt $\Rightarrow NL$

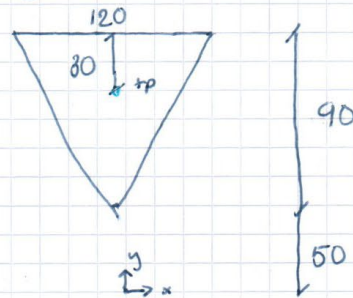
①



$$A_1 = 120 \cdot 140 = 16800$$

$$tp_1 = 70$$

②



$$A_2 = \frac{120 \cdot 90}{2} = 5400$$

$$tp_2 = 140 - 30 = 110$$

$$y_{tp} = \frac{16800 \cdot 70 - 5400 \cdot 110}{16800 - 5400} = 51,05 \text{ mm}$$

Steiners sats

$$I_x = \sum (I_{ox} + A \cdot a^2)$$

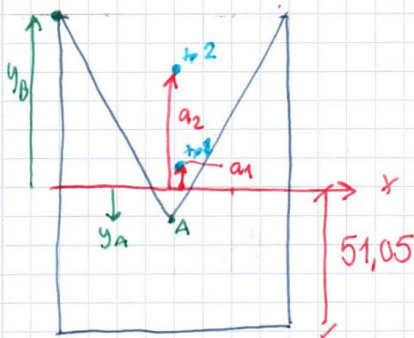
KB s. 27

$$I_{x1} = \frac{120 \cdot 140^3}{12}$$

$$I_{x2} = \frac{120 \cdot 90^3}{36}$$

$$I_{\Pi} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{\Delta} = \frac{bh^3}{36}$$



$$a_1 = 70 - 51,05 = 18,95 \text{ mm}$$

$$a_2 = 110 - 51,05 = 58,95 \text{ mm}$$

$$I_x = \frac{120 \cdot 140^3}{12} + 16800 \cdot 18,95^2 - \left(\frac{120 \cdot 90^3}{36} + 5400 \cdot 58,95^2 \right) =$$

$$I_x = 33472922 - 21195553 = 12277369 \text{ mm}^4$$

Sökt: I_x, I_y

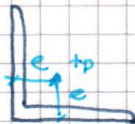
Tvårsnitt KB s. 62

L20x20x3

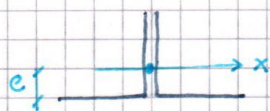
$$I_x = 0,39 \text{ cm}^4 = I_y$$

$$e = 0,60 \text{ cm}$$

$$A = 1,12 \text{ cm}^2$$



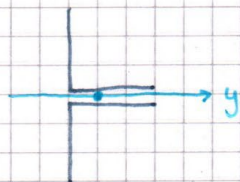
I_x



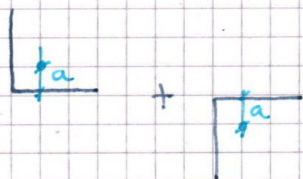
tp för det sammansatta
tvårsnittet är samma som
för en L-profil.

$$I_x = 2 \cdot 0,39 = \underline{\underline{0,78 \text{ cm}^4}}$$

I_y



Symmetri $\Rightarrow$ y-axel = NL



$$a = e = 0,60 \text{ cm}$$

$$I = \sum (I_0 + Aa^2)$$

KB s. 27

$$I_y = 2 (0,39 + 1,12 \cdot 0,6^2) = \underline{\underline{1,5864 \text{ cm}^4}}$$

Sökt: I_x, I_y

Tvårsnitt

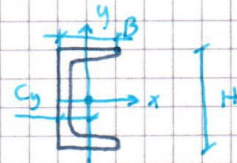
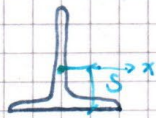
T 80x80 KB s. 65

$$A = 13,6 \text{ cm}^2$$

$$s = 2,22 \text{ cm}$$

$$I_x = 73,7 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 37,0 \text{ cm}^4$$



UPE 80 KB s. 69

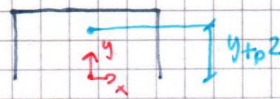
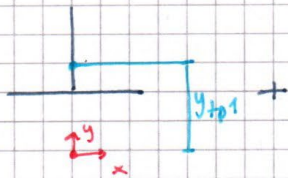
$$A = 10,1 \text{ cm}^2$$

$$c_y = 1,82 \text{ cm}$$

$$I_x = 107 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 26 \text{ cm}^4$$

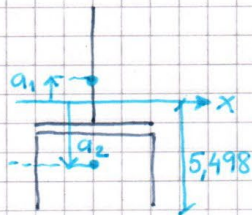
$$B = 5 \text{ cm} \quad H = 8 \text{ cm}$$

För I_x krävs $y_{tp} \Rightarrow N_L(x)$ 

$$y_{tp1} = 5 + 2,22 = 7,22 \text{ cm}$$

$$y_{tp2} = 5 - 1,82 = 3,18 \text{ cm}$$

$$y_{tp} = \frac{\sum A_n \cdot y_{tpn}}{\sum A_n} = \frac{7,22 \cdot 13,6 + 3,18 \cdot 10,1}{13,6 + 10,1} = 5,498 \text{ cm}$$

 I_x 

$$a_1 = 7,22 - 5,498 = 1,722 \text{ cm}$$

$$a_2 = 5,498 - 3,18 = 2,318 \text{ cm}$$

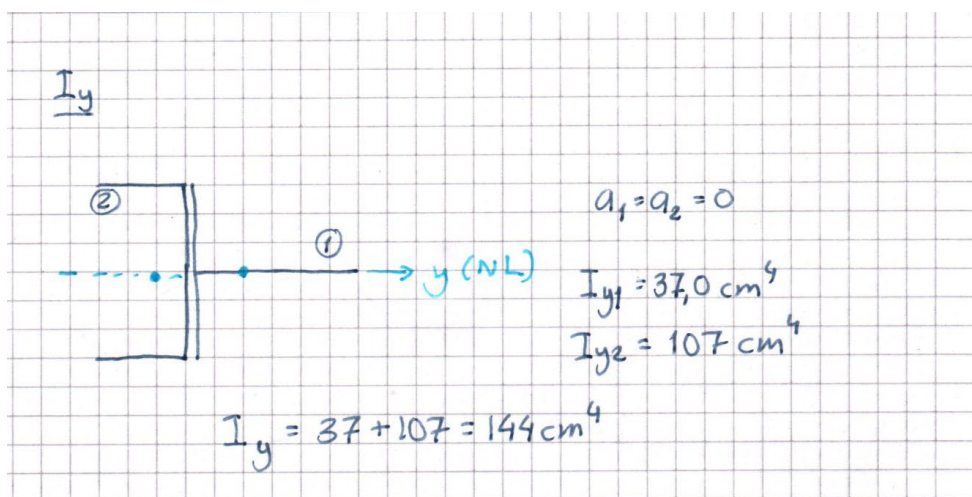
$$I_{1x} = 73,7 \text{ cm}^4$$

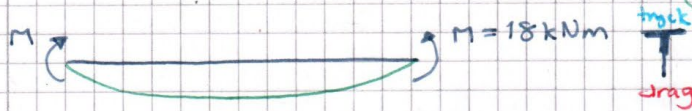
$$I_{2x} = 26 \text{ cm}^4$$

KB s. 27

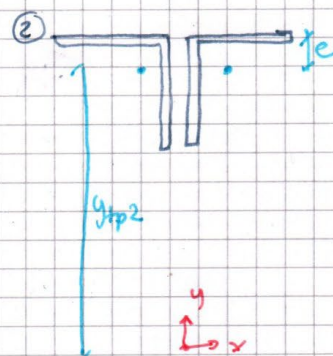
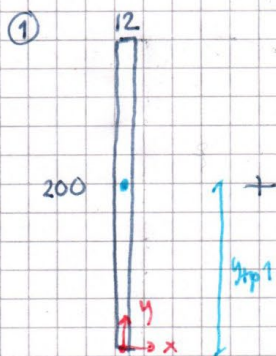
$$I = \sum (I_o + A a^2)$$

$$I_x = 73,7 + 13,6 \cdot 1,722^2 + 26 + 10,1 \cdot 2,318^2 = \underline{\underline{194 \text{ cm}^4}}$$



Sökt: σ_{max}^+ , σ_{max}^- 

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot e$$

TrärsnittetBestäm $y_{tp} \Rightarrow$ NL (x-axel)L 90x90x9 KBs62

$$A = 15,5 \text{ cm}^2$$

$$e = 2,54 \text{ cm}$$

$$I_x = I_y = 116 \text{ cm}^4$$

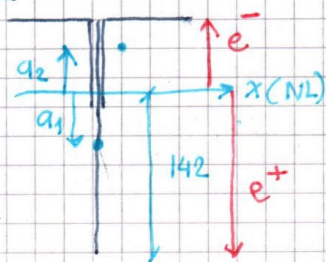
$$A_1 = 200 \cdot 12 = 2400 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 2 \cdot 15,5 \cdot 10^2 = 3100 \text{ mm}^2$$

$$y_{tp1} = 100 \text{ mm}$$

$$y_{tp2} = 200 - 25,4 = 174,6 \text{ mm}$$

$$y_{tp} = \frac{\sum A_n y_{tpn}}{\sum A_n} = \frac{2400 \cdot 100 + 3100 \cdot 174,6}{2400 + 3100} = 142 \text{ mm}$$

 I_x 

$$a_1 = 142 - 100 = 42 \text{ mm}$$

$$a_2 = 174,6 - 142 = 32,55 \text{ mm}$$

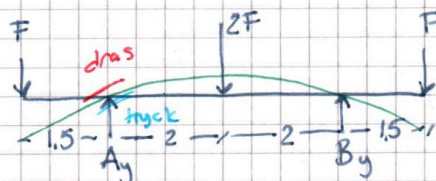
$$I_{x1} = \frac{12 \cdot 200^3}{12} = 8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x2} = 2 \cdot 116 \cdot 10^4 = 2,32 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 8 \cdot 10^6 + 2400 \cdot 42^2 + 2,32 \cdot 10^6 + 3100 \cdot 32,55^2 = 17,838 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{18 \cdot 10^6}{I_x} \cdot 142 = 143 \text{ MPa (drag)}$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{18 \cdot 10^6}{I_x} (200 - 142) = 58,5 \text{ MPa (tryck)}$$

Sökt: $F_{\max}$ Givet: $\sigma_{\text{tiu}}^+ = 40 \text{ MPa}$ $\sigma_{\text{tiu}}^- = 120 \text{ MPa}$ Bestäm $M_{\max}$ med V -o- M -diagramSymmetri $\Rightarrow$

$$A_y = B_y = 2F$$



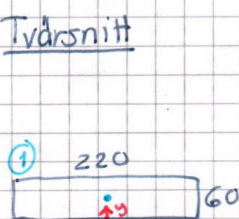
$$A_1 = -1,5F$$

$$A_2 = 2F$$

$$M(1,5) = -1,5F$$

$$M(3,5) = -1,5F + 2F = 0,5F$$

$$M_{\max} = -1,5F \text{ Nm}$$

Tvårsnitt

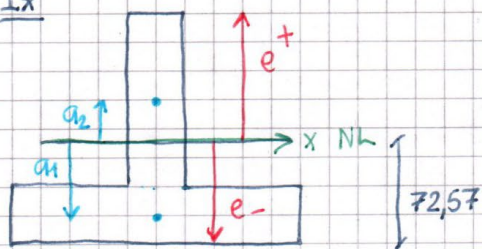
$$A_1 = 220 \cdot 60$$

$$A_2 = 150 \cdot 60$$

$$y_{tp1} = 30$$

$$y_{tp2} = 60 + 75 = 135$$

$$y_{tp} = \frac{220 \cdot 60 \cdot 30 + 150 \cdot 60 \cdot 135}{220 \cdot 60 + 150 \cdot 60} = 72,57 \text{ mm}$$

 I_x 

$$a_1 = 72,57 - 30 = 42,57 \text{ mm}$$

$$a_2 = 135 - 72,57 = 62,43 \text{ mm}$$

$$I_{x1} = \frac{220 \cdot 60^3}{12}$$

$$I_{x2} = \frac{60 \cdot 150^3}{12}$$

$$I_x = \sum (I_0 + Aa^2) = \frac{220 \cdot 60^3}{12} + 220 \cdot 60 \cdot 42,57^2 + \frac{60 \cdot 150^3}{12} + 150 \cdot 60 \cdot 62,43^2$$

$$I_x = 79,83 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Drag

$$\sigma_{\text{tiu}}^+ = \frac{M}{I_x} \cdot e^+ \quad 40 = \frac{1,5F \cdot 10^3}{I_x} (210 - 72,57) \Rightarrow F = 15491 \text{ N}$$

Tryck

$$\sigma_{\text{tiu}}^- = \frac{M}{I_x} \cdot e^- \quad 120 = \frac{1,5F \cdot 10^3}{I_x} 72,57 \Rightarrow F = 88003 \text{ N}$$