

HÅLLFASTHETSLÄRA ÖVNINGSUPPGIFTER LÖSNINGAR

Datum: 2021-05-05

Lösningarna till övningsuppgifterna är ett levande dokument. Jag fyller på med lösningar, gör förbättringar och rättar de slarvfel som är svåra att undvika när man utvecklar material.

På YouTube kanalen, "EduME:s Övningsuppgifter i hållfasthetslära", finns inspelade lösningsförslag till många av uppgifterna. Flera uppgifterna finns även på spellistor med introducerande teori på olika avsnitt.

Det är fritt fram att använda detta material för dig som undervisar, men materialet ersätter inte en bra handledning av elever/studenten.

Häftet får inte editeras eller omarbetas.

Dela med dig av kanalen till dina studenter och/eller bädda in lämpliga videos på din lärplattform.

Jag använder mig av Karl Björks "Formler och Tabeller för Mekanisk konstruktion" när jag löser uppgifterna. Denna finns att beställa på bjorksforlag.se

En komplett översikt av kanalen och materialet finns på edume.nu

/Madeleine



<https://www.youtube.com/channel/UCZWty6uAUlkab9XyHQLAu9Q>



Madeleine Hermann

EduME – Education and Mechanical Engineering

1. Inre krafter och moment

1.1

Inre krafter och moment

Sökt: N_a , N_b , N_c

(Notera att krafterna är i jämvikt.)

$$\sum F = 0 \rightarrow 3 + 2 - 4 - 1 = 0 \quad \text{OK.}$$

(Den som skapat uppgiften kan ju göra bort sig :))

a-a

$$1 \leftarrow \boxed{} \rightarrow N_a \rightarrow N_a - 1 = 0 \quad \underline{\underline{N_a = 1 \text{ kN}}}$$

b-b

$$1 \leftarrow \boxed{ \rightarrow 2} \rightarrow N_b \rightarrow N_b - 1 + 2 = 0$$

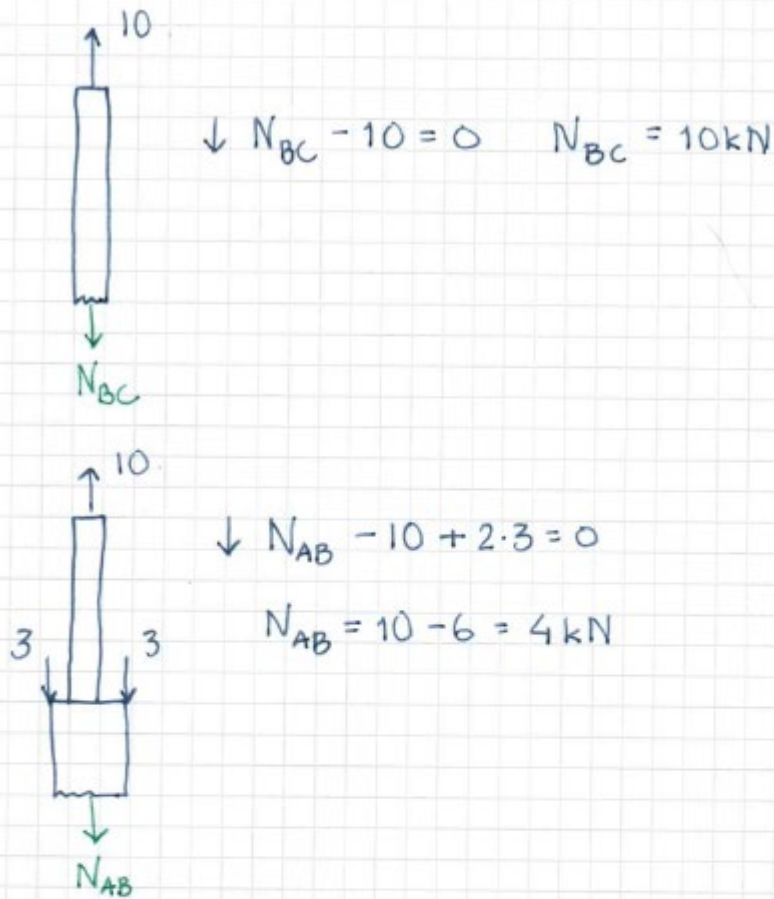
$$\underline{\underline{N_b = -1 \text{ kN}}}$$

c-c

enklast :))

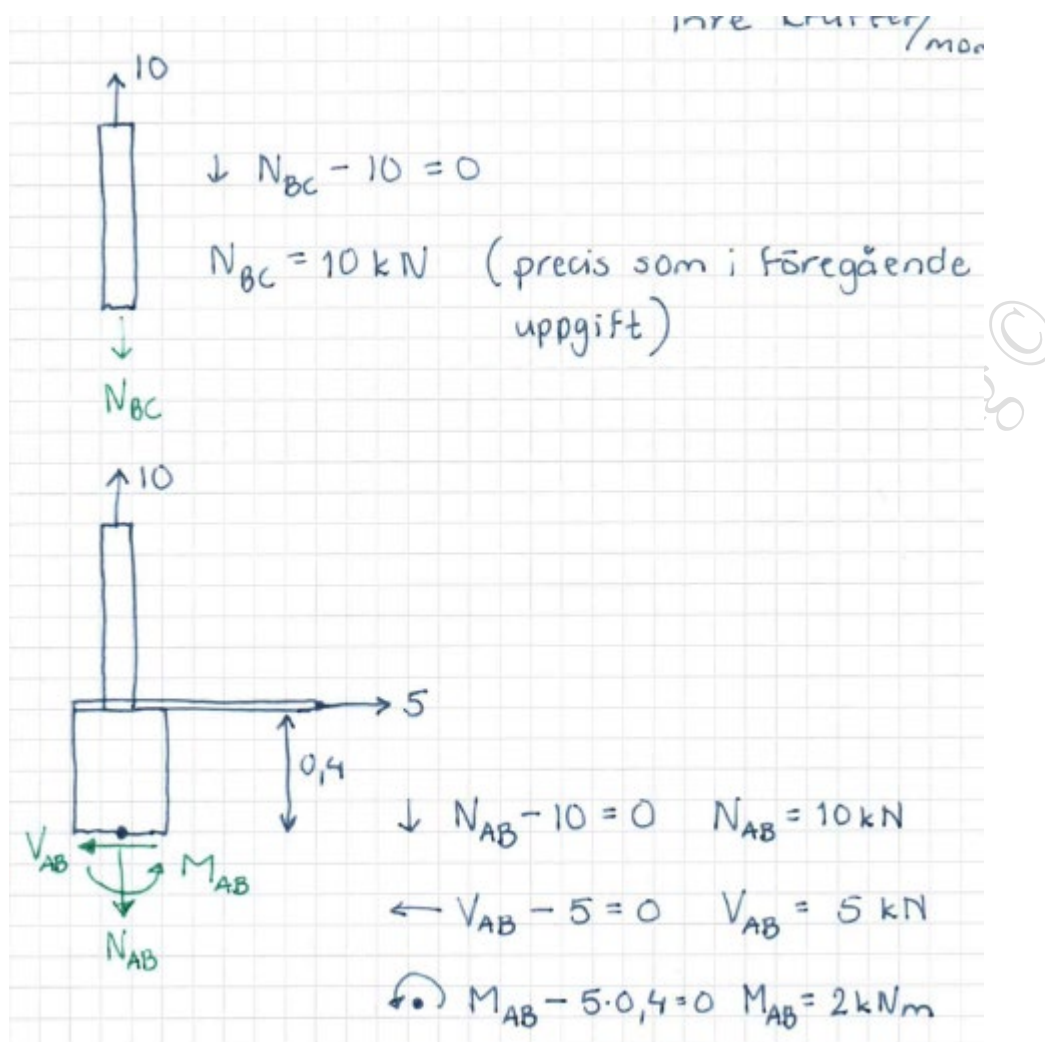
$$N_c \leftarrow \boxed{} \rightarrow 3 \leftarrow N_c - 3 = 0 \quad \underline{\underline{N_c = 3 \text{ kN}}}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \leftarrow \boxed{ \rightarrow 2 \leftarrow 4} \rightarrow N_c \\ \text{Krångligare} \end{array} \right. \rightarrow N_c + 2 - 4 - 1 = 0 \quad \underline{\underline{N_c = 3 \text{ kN}}} \left. \begin{array}{c} \text{Samma} \\ \text{Svar!} \end{array} \right)$$



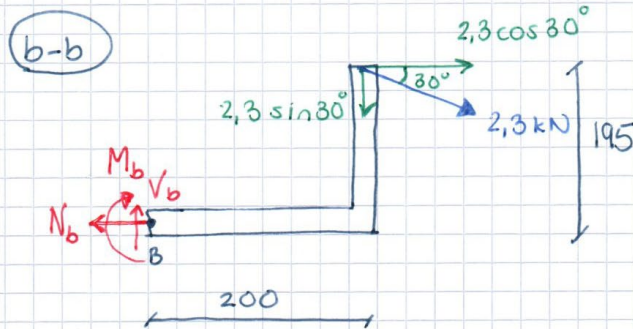
Det är endast krafter i axiell riktning och de två krafterna (3kN) är symmetriskt placerade. Detta gör att det inte blir något böjande moment.

Det finns inga horisontella krafter därmed inga tvärkrafter.



Sökt: Inre krafter & moment i snitt

b-b & c-c.

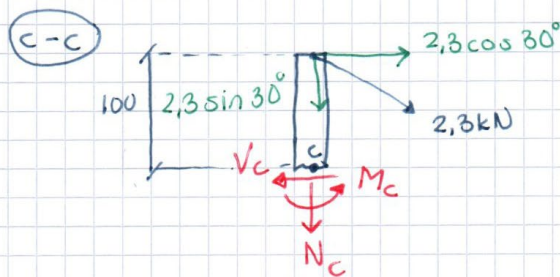


$$\leftarrow N_b - 2,3 \cos 30^\circ = 0 \quad \underline{N_b = 1,99 \text{ kN}}$$

$$\uparrow V_b - 2,3 \sin 30^\circ = 0 \quad \underline{V_b = 1,15 \text{ kN}}$$

$$\curvearrowright M_b + 195 \cdot 2,3 \cos 30^\circ + 200 \cdot 2,3 \sin 30^\circ = 0$$

$$M_b = -618 \text{ kNm} = \underline{\underline{-618 \text{ Nm}}}$$



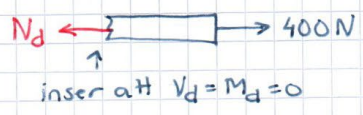
$$\downarrow N_c + 2,3 \sin 30^\circ = 0 \quad \underline{N_c = -1,15 \text{ kN}}$$

$$\leftarrow V_c - 2,3 \cos 30^\circ = 0 \quad \underline{V_c = 1,99 \text{ kN}}$$

$$\curvearrowright M_c - 100 \cdot 2,3 \cos 30^\circ = 0 \quad \underline{\underline{M_c = 199 \text{ kNm} = 199 \text{ Nm}}}$$

Sökt: Inre krafter & moment i snitt b-b, c-c och d-d.

(d-d)

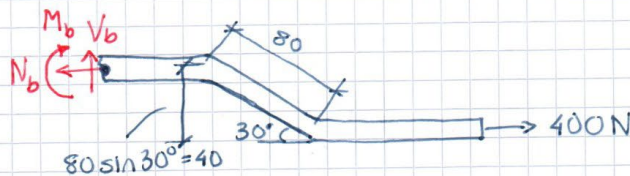


$$\leftarrow N_d - 400 = 0 \quad \underline{N_d = 400 \text{ N}}$$

$$V_d = 0 \quad \underline{M_d = 0}$$

inser att $V_d = M_d = 0$

(b-b)

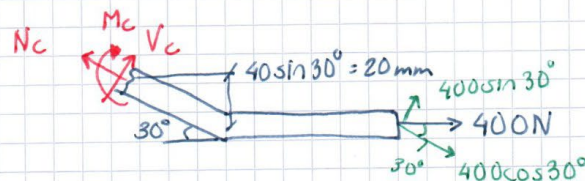


$$\leftarrow N_b - 400 = 0 \quad \underline{N_b = 400 \text{ N}}$$

$$\uparrow V_b = 0$$

$$\curvearrowright M_b - 400 \cdot 40 = 0 \quad M_b = 16000 \text{ Nmm} = \underline{16 \text{ Nm}} = M_b$$

(c-c)



$$\leftarrow N_c - 400 \cos 30^\circ = 0$$

$$\underline{N_c = 346 \text{ N}}$$

$$\nearrow V_c + 400 \sin 30^\circ = 0 \quad \underline{V_c = -200 \text{ N}}$$

$$\curvearrowright M_c - 400 \cdot 20 = 0 \quad M_c = 8000 \text{ Nmm} = \underline{8 \text{ Nm}}$$

+

Sökt: Samtliga krafter i stängerna

Givet: $L = 1,5\text{ m}$ Inga moment ty fackverk $\Rightarrow$ endast drag eller tryck i stängerna

Frilägg knutpunkter

Ansätt alltid dragkrafter
dvs pil från punkt.

(A)

$$\downarrow 5 + AD \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow AD = -5,77 \text{ kN}$$

$$\rightarrow AB + AD \cos 60^\circ = 0$$

$$AB = -(-5,77) \cos 60^\circ = 2,89 \text{ kN}$$

(D)

$$\uparrow AD \cos 30^\circ + BD \cos 30^\circ = 0$$

$$BD = -AD = -(5,77) = 5,77 \text{ kN}$$

$$\rightarrow DE + BD \sin 30^\circ - AD \sin 30^\circ = 0$$

$$DE = (AD - BD) \sin 30^\circ = (-5,77 - 5,77) \sin 30^\circ$$

$$DE = -5,77 \text{ kN}$$

(B)

$$\downarrow 8 + BD \sin 60^\circ + BE \sin 60^\circ = 0$$

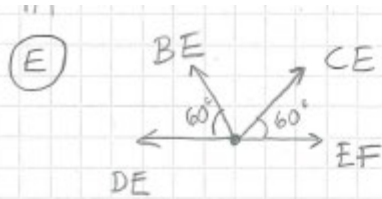
$$BE = (-8 - 5,77 \sin 60^\circ) / \sin 60^\circ = -15,01 \text{ kN}$$

$$\rightarrow BC - BD \cos 60^\circ + BE \cos 60^\circ - AB = 0$$

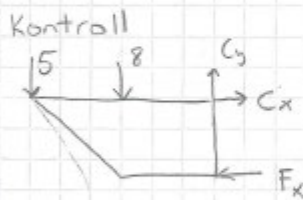
$$BC = AB + (BD - BE) \cos 60^\circ =$$

$$BC = 2,89 + (5,77 - (-15,01)) \cos 60^\circ =$$

$$BC = 13,28 \text{ kN}$$



$$\begin{aligned} \uparrow \quad & BE \sin 60^\circ + CE \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow CE = -BE = 15,01 \text{ kN} \\ \rightarrow \quad & EF - DE + CE \cos 60^\circ - BE \cos 60^\circ = 0 \\ & EF = DE + (BE - CE) \cos 60^\circ = -5,77 + (-15,01 - 15,01) \cos 60^\circ \\ & EF = -20,78 \text{ kN} \end{aligned}$$



$$\curvearrowright F_x \cdot 1,5 \sin 60^\circ - 8 \cdot 1,5 - 5 \cdot 3 = 0$$

$$F_x = 20,78 \text{ kN} \Rightarrow EF = -20,78 \text{ kN}$$

OK!!!

Svar:

$$AB = 2,89 \text{ kN}$$

$$AD = -5,77 \text{ kN}$$

$$BD = 5,77 \text{ kN}$$

$$BE = -15,01 \text{ kN}$$

$$BC = 13,28 \text{ kN}$$

$$DE = -5,77 \text{ kN}$$

$$EF = -20,78 \text{ kN}$$

$$CE = 15,01 \text{ kN}$$

Bestäm stödkrafter (kN, m)

$\sum \curvearrowright A: 1,8 \cdot 1 - 1,6 \cdot 3 + B_y \cdot 4,5 - 6 \cdot 2,6 \sin 25^\circ = 0$
 $B_y = 2,13 \text{ kN}$

$\uparrow: A_y + B_y + 1,8 - 1,6 - 2,6 \sin 25^\circ = 0$
 $A_y = 1,6 - 1,8 + 2,6 \sin 25^\circ - 2,13 = -1,23 \text{ kN}$

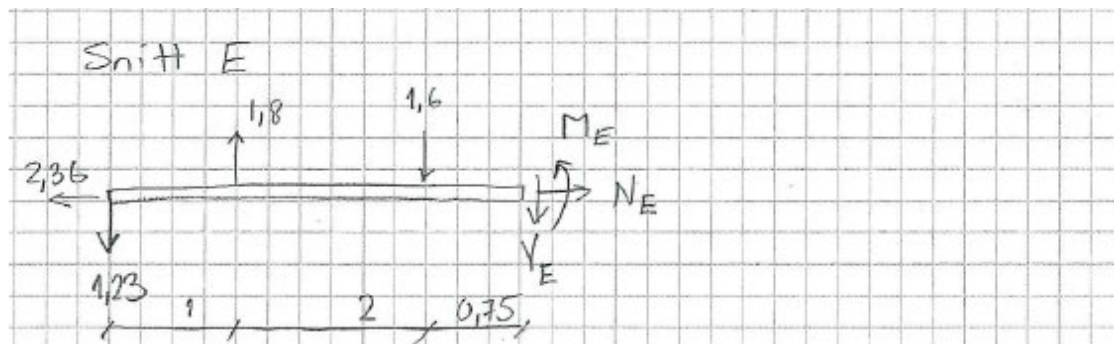
$\rightarrow: 2,6 \cos 25^\circ - A_x = 0 \Rightarrow A_x = 2,36 \text{ kN}$

Snitt C

$\rightarrow: N_c - 2,36 = 0 \quad N_c = 2,36 \text{ kN}$
 $\downarrow: V_c + 1,23 = 0 \quad V_c = -1,23 \text{ kN}$
 $\curvearrowright: M_c + 1,23 \cdot 0,5 = 0 \quad M_c = -0,615 \text{ kNm}$

Snitt D

$\rightarrow: N_D = 2,36 \text{ kN}$
 $\downarrow: V_D + 1,23 - 1,8 = 0 \quad V_D = 0,57 \text{ kN}$
 $\curvearrowright: M_D + 1,23 \cdot 2 - 1,8 \cdot 1 = 0 \quad M_D = -0,66 \text{ kNm}$



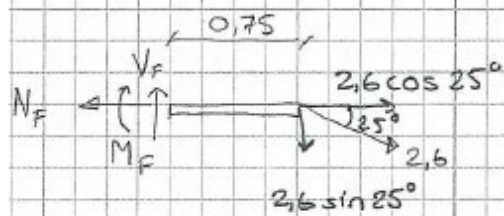
$$\rightarrow N_E = 2,36 \text{ kN}$$

$$\downarrow V_E + 1,6 - 1,8 + 1,23 = 0 \quad V_E = 1,03 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright M_E + 1,6 \cdot 0,75 - 1,8 \cdot 2,75 + 1,23 \cdot 3,75 = 0$$

$$M_E = -0,86 \text{ kNm}$$

Snitt F (enklares att hitta höger om snittet)



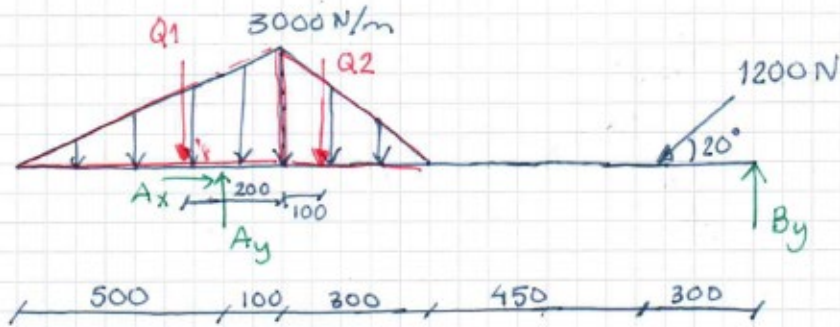
$$\leftarrow N_F = 2,36 \text{ kN}$$

$$\uparrow V_F - 2,6 \sin 25^\circ = 0$$

$$V_F = 1,1 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright M_F + 0,75 \cdot 2,6 \sin 25^\circ = 0$$

$$M_F = -0,82 \text{ kNm}$$



$$Q_1 = \frac{3000 \cdot 0,6}{2} = 900 \text{ N}$$

$$Q_2 = \frac{3000 \cdot 0,3}{2} = 450 \text{ N}$$

placeras i triangeln tp
dvs $\frac{600}{3} = \frac{300}{3}$

$$\uparrow \sum M_A: B_y (100 + 300 + 450 + 300) - (100 + 300 + 450) \cdot 1200 \sin 20^\circ - 450 \cdot 200 + 900 \cdot 100 = 0$$

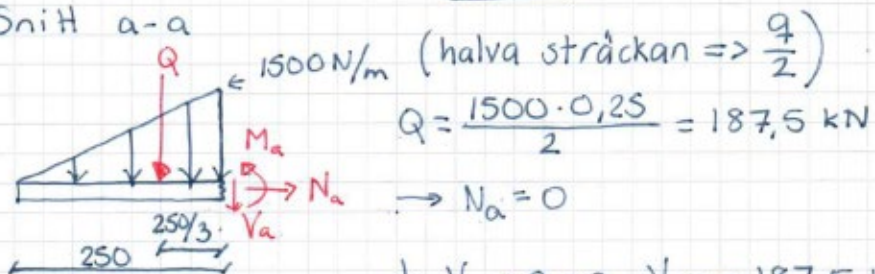
$$B_y = 303 \text{ N}$$

$$\uparrow \sum F_y: A_y + B_y - 900 - 450 - 1200 \sin 20^\circ = 0$$

$$A_y = 900 + 450 + 1200 \sin 20^\circ - 303 = 1457 \text{ N}$$

$$\rightarrow \sum F_x: A_x - 1200 \cos 20^\circ = 0 \quad A_x = 1128 \text{ N}$$

Snitt a-a

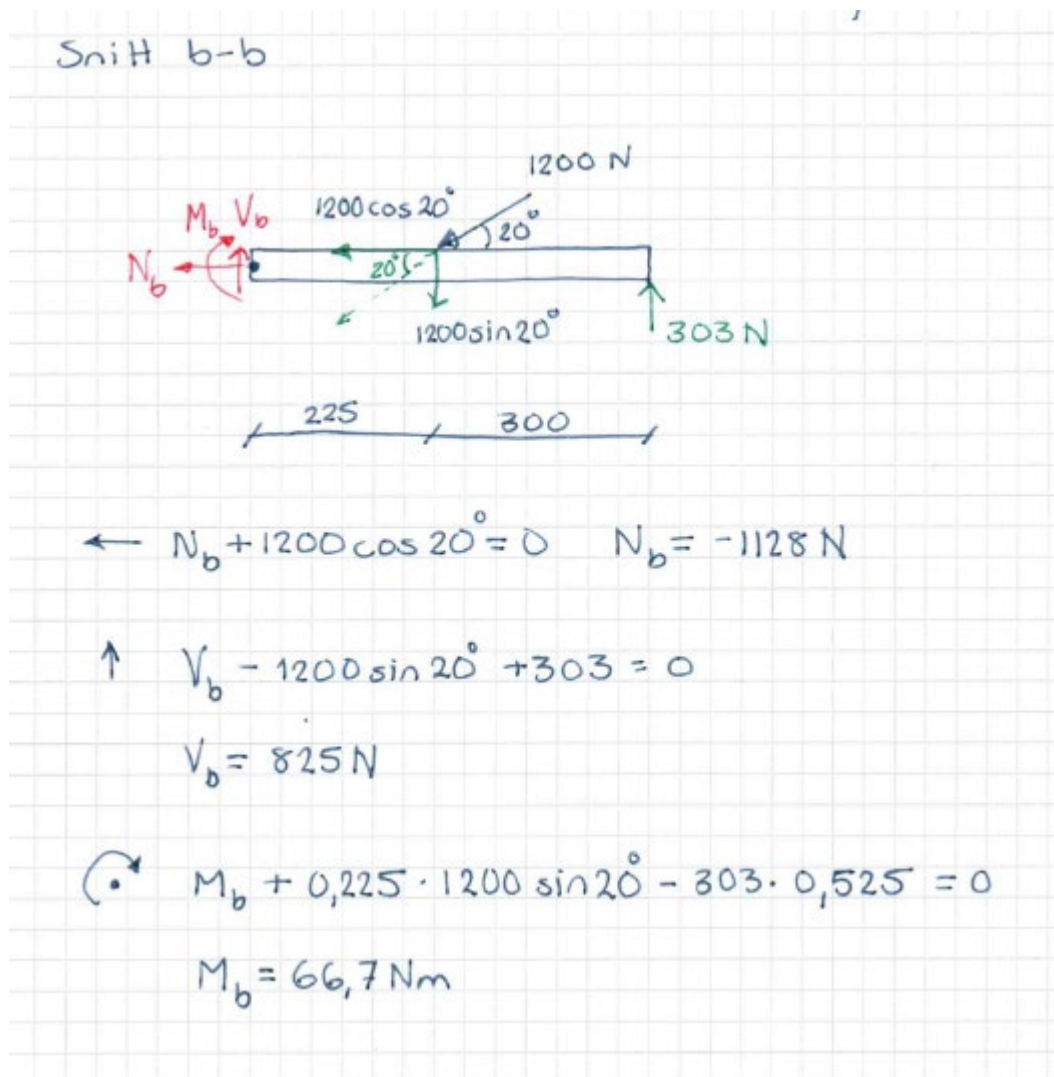


$$Q = \frac{1500 \cdot 0,25}{2} = 187,5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow N_a = 0$$

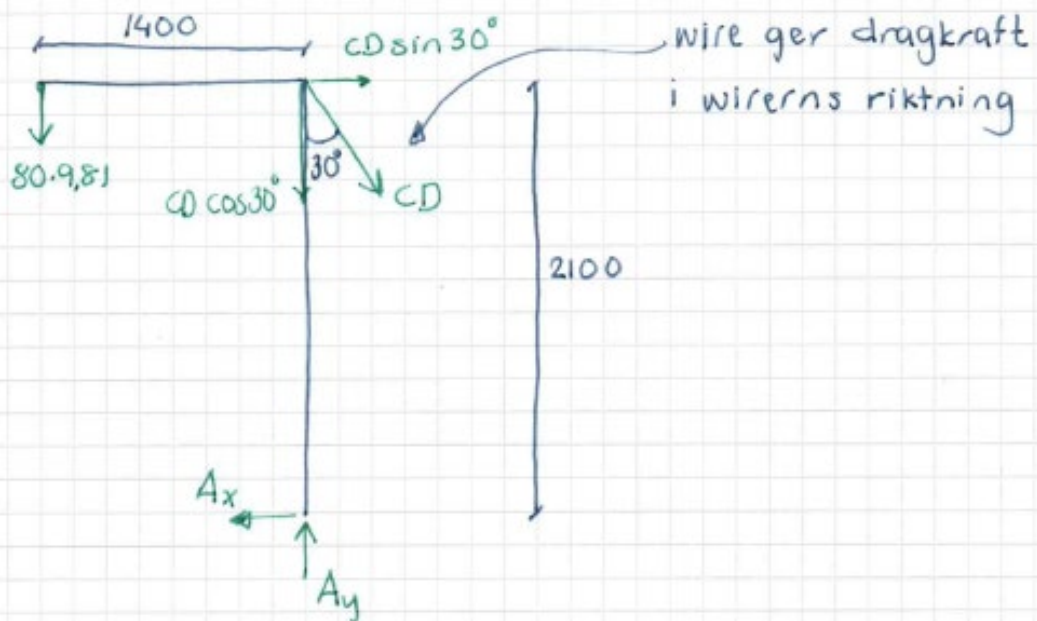
$$\downarrow \sum F_y: V_a + Q = 0 \quad V_a = -187,5 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M_a: M_a + Q \cdot \frac{250}{3} = 0 \quad M_a = -15,6 \text{ Nm}$$



1.9a

Inre krafter och moment



$$\curvearrowleft A \quad 80 \cdot 9,81 \cdot 1400 - 2100 \cdot CD \sin 30^\circ = 0$$

$$CD = \frac{80 \cdot 9,81 \cdot 1400}{2100 \cdot \sin 30^\circ} = \underline{\underline{1046 \text{ N}}}$$

$$\uparrow \quad A_y - 80 \cdot 9,81 - CD \cos 30^\circ = 0$$

$$A_y = 80 \cdot 9,81 + 1046 \cos 30^\circ = \underline{\underline{1691 \text{ N}}}$$

$$\leftarrow \quad A_x - CD \sin 30^\circ = 0 \quad A_x = 1046 \sin 30^\circ = \underline{\underline{523 \text{ N}}}$$

b (I)



Kommentar:

Stödkrafter behövs
inte för detta snitt.

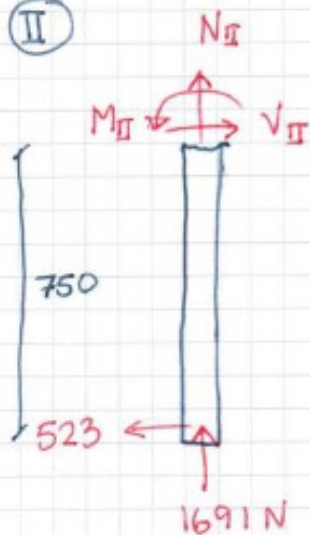
$$\rightarrow N_I = 0$$

$$\downarrow V_I + 80.9,81 = 0 \quad V_I = \underline{\underline{-785 \text{ N}}}$$

$$\curvearrowright M_I + 80.9,81 \cdot 400 = 0$$

$$M_I = -313920 \text{ Nmm} = \underline{\underline{-314 \text{ Nm}}}$$

(II)

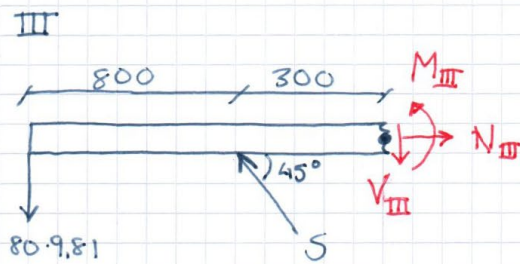


$$\uparrow N_{II} + 1691 = 0 \quad N_{II} = \underline{\underline{-1691 \text{ N}}}$$

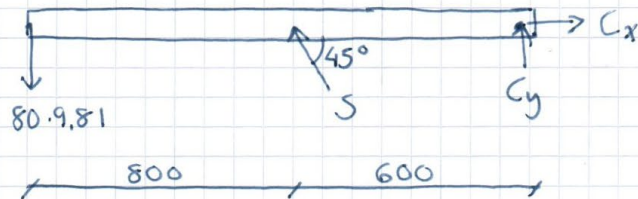
$$\rightarrow V_{II} - 523 = 0 \quad V_{II} = \underline{\underline{523 \text{ N}}}$$

$$\curvearrowright M_{II} - 523 \cdot 750 = 0$$

$$M_{II} = 392250 \text{ Nmm} = \underline{\underline{392 \text{ Nm}}}$$



S måste bestämmas ty 4 obekanta ($S, N_{III}, M_{III}, V_{III}$)
och endast 3 jämviktsekv. $\uparrow \rightarrow \curvearrowright$



$$\curvearrowleft \quad 80 \cdot 9,81 \cdot (800 + 600) - S \sin 45^\circ \cdot 600 = 0$$

$$S = 2590 \text{ N}$$

Jämvikt $\Rightarrow$ snittkrafter/moment i III

$$\rightarrow N_{III} - 2590 \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad \underline{N_{III} = 1831 \text{ N}}$$

$$\downarrow V_{III} + 80 \cdot 9,81 - 2590 \sin 45^\circ = 0 \quad \underline{V_{III} = 1047 \text{ N}}$$

$$\curvearrowleft M_{III} + 80 \cdot 9,81 (800 + 300) - 2590 \sin 45^\circ \cdot 300 = 0$$

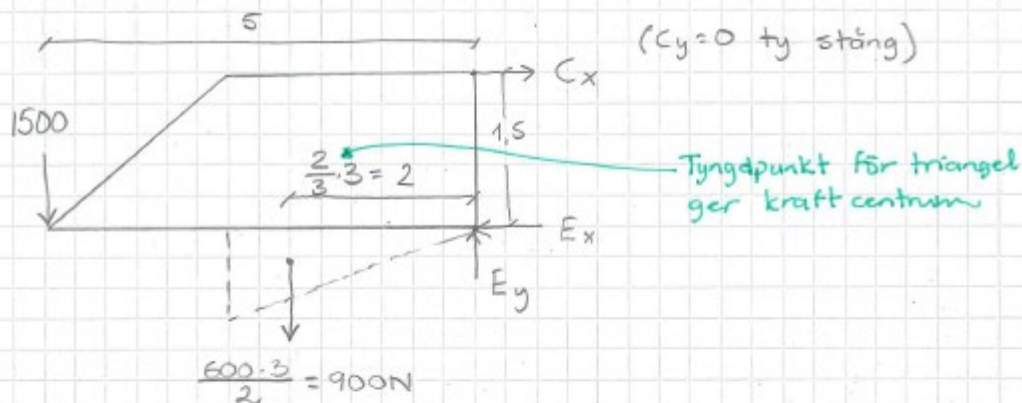
$$M_{III} = -313858 \text{ Nmm} = \underline{\underline{-132 \text{ Nm}}}$$

1.10

Inre krafter och moment

Kommentar: Pga en äldre lösning benämns tvärkraften som T . Ersätt med V och var konsekvent.

Frilägg = bestäm stödkrafter (globalt)

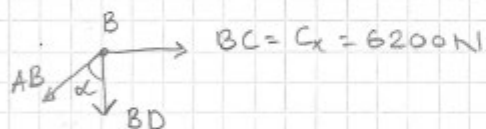


$$\curvearrowleft E \quad 1500 \cdot 5 + 900 \cdot 2 - C_x \cdot 1,5 = 0 \quad C_x = 6200 \text{ N}$$

$$\leftarrow E_x - C_x = 0 \Rightarrow E_x = C_x = 6200 \text{ N}$$

$$\uparrow E_y - 1500 - 900 = 0 \Rightarrow E_y = 2400 \text{ N}$$

Bestäm stångkrafter



$$\rightarrow BC - AB \sin 53,13^\circ = 0$$

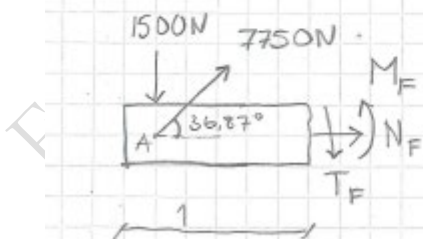
$$AB = 6200 / \sin 53,13^\circ = 7750 \text{ N}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{1,5}\right) = 53,13^\circ$$

$$\downarrow AB \cos 53,13^\circ + BD = 0$$

$$BD = -7750 \cos 53,13^\circ = -4650 \text{ N}$$

Snitta vid F



$$\rightarrow N_F + 7750 \cdot \cos 36,87^\circ = 0$$

$$N_F = -6200 \text{ N}$$

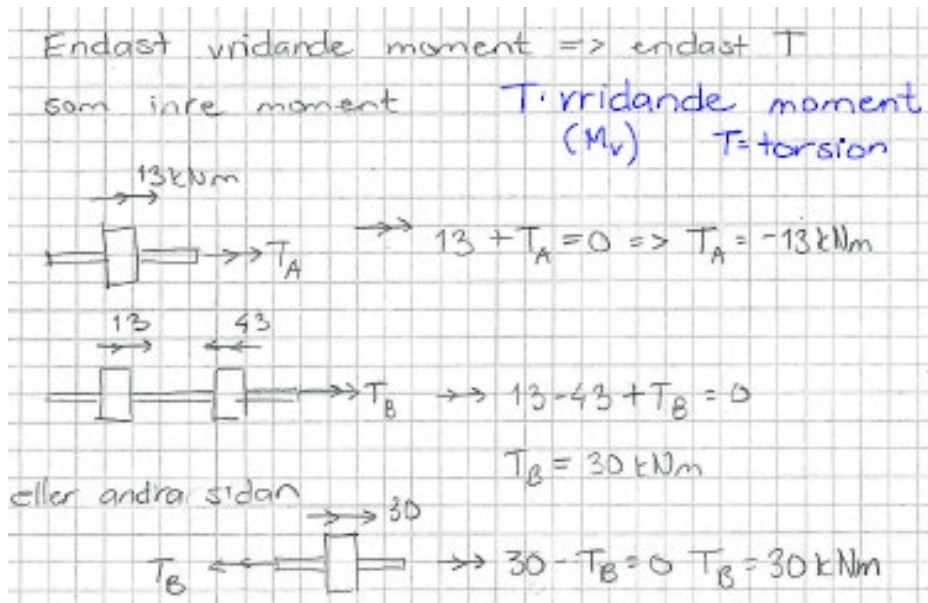
$$\downarrow T_F + 1500 - 7750 \sin 36,87^\circ = 0$$

$$T_F = 3150 \text{ N}$$

Moment i A $\Rightarrow M_F$ enkelt
 $\curvearrowleft A \quad M_F - T_F \cdot 1 = 0$

$$\curvearrowleft F \quad M_F + 1500 \cdot 1 - 7750 \cdot \sin 36,87^\circ \cdot 1 = 0$$

$$M_F = 3150 \text{ Nm}$$



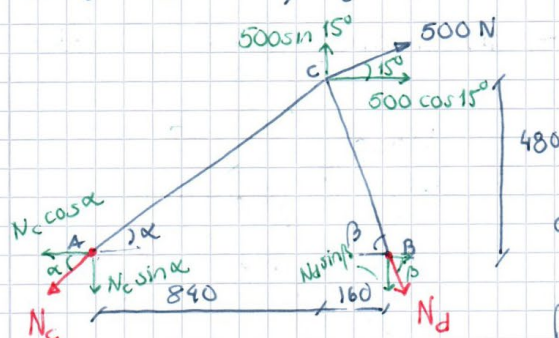
Sökt: krafter & moment i mittsnitt
c-c & d-d.

Ledade stänger vilka endast är belastade i knutpunkter har endast upp normalkrafter.

Ex. fackverk

AC & BC är ledade i ändarna & belastas i punkten C.

$$M_c = M_d = 0, \quad V_c = V_d = 0$$



$$\alpha = \arctan\left(\frac{480}{840}\right) = 29,75^\circ$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{480}{160}\right) = 71,57^\circ$$

Friläggning av profilerna, riktningen på N_c & N_d är känd (profilens riktning). Drag eller tryck ges av jämvikten.

$$\begin{aligned} \curvearrowright B \quad N_c \sin 29,75^\circ (840 + 160) - 480 \cdot 500 \cos 15^\circ - 160 \cdot 500 \sin 15^\circ &= 0 \\ N_c &= 509 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\downarrow N_c \sin 29,75^\circ + N_d \sin 71,57^\circ - 500 \sin 15^\circ = 0$$

$$N_d = \frac{500 \sin 15^\circ - 509 \sin 29,75^\circ}{\sin 71,57^\circ} = -130 \text{ N (tryck)}$$

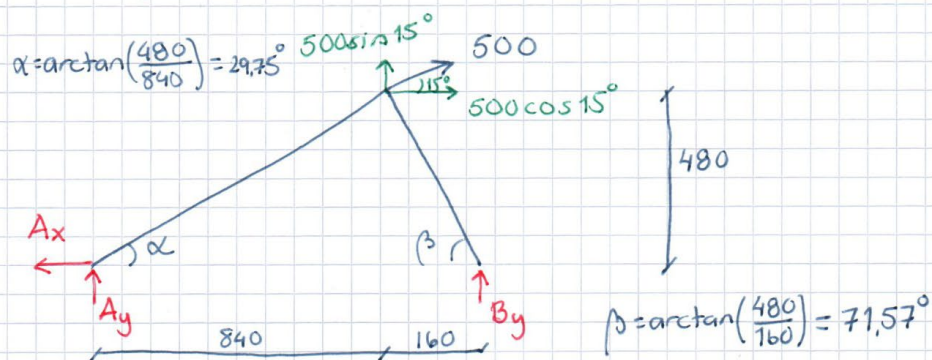
$$\text{Svar: } N_c = 509 \text{ N (drag)} \quad N_d = -130 \text{ N (tryck)}$$

Sökt: Krafter & moment i mittsnitten c-c & d-d

Snarlik tidigare uppgift, men nu är det en böjlad (G) profil som belastas i en icke ledad punkt, C.

Profilen kommer därför ta upp både krafter (N, V) samt moment.

Frilägg och bestäm stödkrafter.



$$\sum \curvearrowleft A \quad B_y(840+160) + 500 \sin 15^\circ \cdot 840 - 500 \cos 15^\circ \cdot 480 = 0$$

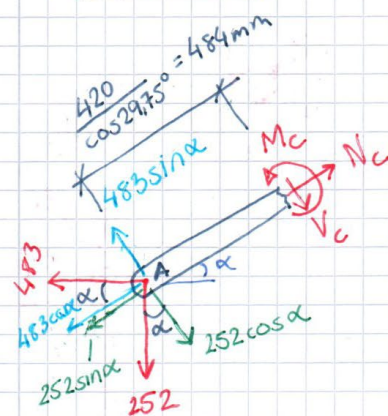
$$B_y = 123 \text{ N}$$

$$\leftarrow A_x - 500 \cos 15^\circ = 0 \quad A_x = 483 \text{ N}$$

$$\uparrow A_y + B_y + 500 \sin 15^\circ = 0 \quad A_y = -252 \text{ N}$$

Snitt c-c

Ursäkta att det blev lite kladdigt!



$$\rightarrow N_c - 483 \cos \alpha - 252 \sin \alpha = 0$$

$$N_c = 544 \text{ N}$$

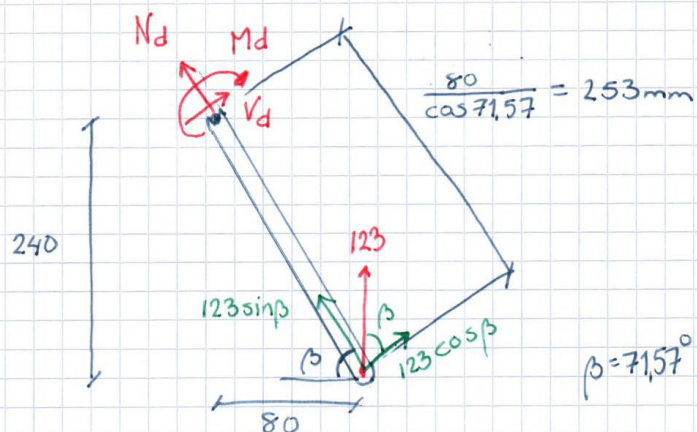
$$\downarrow V_c + 252 \cos \alpha - 483 \sin \alpha = 0$$

$$V_c = 20,9 \text{ N}$$

$$\sum \curvearrowleft A \quad M_c - 20,9 \cdot 484 = 0 \quad M_c = 10110 \text{ Nmm}$$

$$M_c = 10,1 \text{ Nm}$$

Snitt d-d



$$\uparrow N_d + 123 \sin 71.57^\circ = 0 \quad \underline{N_d = -117 \text{ N}}$$

$$\nearrow V_d + 123 \cos 71.57^\circ = 0 \quad \underline{V_d = -38.9 \text{ N}}$$

$$\curvearrowright M_d - 123 \cos 71.57^\circ \cdot 253 = 0$$

$$M_d = 9838 \text{ Nmm} = \underline{9.8 \text{ Nm}}$$