

# HÅLLFASTHETSLÄRA ÖVNINGSUPPGIFTER LÖSNINGAR

Datum: 2022-07-23

Lösningarna till övningsuppgifterna är ett levande dokument. Jag fyller på med lösningar, gör förbättringar och rättar de slarvfel som är svåra att undvika när man utvecklar material.

På YouTube kanalen, "EduME:s Övningsuppgifter i hållfasthetslära", finns inspelade lösningsförslag till många av uppgifterna. Flera uppgifterna finns även på spellistor med introducerande teori på olika avsnitt.

Det är fritt fram att använda detta material för dig som undervisar, men materialet ersätter inte en bra handledning av elever/studenten.

Häftet får inte editeras eller omarbetas.

Dela med dig av kanalen till dina studenter och/eller bädda in lämpliga videos på din lärplattform.

Jag använder mig av Karl Björks "Formler och Tabeller för Mekanisk konstruktion" när jag löser uppgifterna. Denna finns att beställa på [bjorksforlag.se](http://bjorksforlag.se)

En komplett översikt av kanalen och materialet finns på [edume.nu](http://edume.nu)

*/Madeleine*

 <https://www.youtube.com/channel/UCZWty6uAulKab9XyHQIAu9Q>



Madeleine Hermann

EduME – Education and Mechanical Engineering

## 3. Termisk belastning

3.1

Termisk belastning

Stål:  $E = 210 \text{ GPa}$   
 KB  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$   
 s. 70

$$\Delta l = l \alpha \Delta T \quad \text{s. 70}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{s. 25}$$

KB

Hooks lag  $\sigma = E \cdot \epsilon$

$$\epsilon_T = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 150 = 1,8 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (1)$$

$$F_A = F_B = A \cdot \sigma \quad (2)$$

$$A = \frac{(d_o^2 - d_i^2) \cdot \pi}{4}, \quad d_i = d_o - 2t \quad (3)$$

	(3) A (mm <sup>2</sup> )	(1) $\sigma$ (MPa)	$F_{AB}$ (kN)
DN50	366	378	138
DN125	1705	378	645
DN300	4021	378	1520

- Spänningen är lika för samtliga dimensioner.

Spänning erhålls från Hooks lag = endast elasticitet, temperaturhöjning och längdutvidgningskoefficient påverkar spänningen. (ej arean)

- Kraften påverkas dock av arean. Ju större area som hindrar utvidgningen ju större kraft.

Sökt: a)  $\sigma_{al}$ ,  $\sigma_{stål}$     b)  $\delta$

Givet:  $\Delta T = 180^\circ C$

$L = 300 \text{ mm}$

Stålkärna

$$\alpha_s = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } / ^\circ C$$

$$E_s = 210 \text{ GPa}$$

$$A_s = \frac{\pi 30^2}{4} = 707 \text{ mm}^2$$

Al-hölje

$$\alpha_{al} = 23,5 \cdot 10^{-6} \text{ } / ^\circ C$$

$$E_{al} = 70 \text{ GPa}$$

$$A_{al} = \frac{(\pi 60^2 - \pi 30^2)}{4} = 2121 \text{ mm}^2$$

Inre krafter skapas pga  $\Delta T$  och kombinationen av två material.

$\alpha_s < \alpha_{al} \Rightarrow$  Höljet vill bli längre än stålkärnan.

Stålkärnan hindrar al-höljet att förlängas



tryck i al-höljet  $\cong$  drag i stålkärnan



$$N_{al} = -N_s \quad (1)$$

$$\text{Längden förblir } L \Rightarrow \delta_{al} = \delta_s \quad (2)$$

$$\delta^T = L \alpha \Delta T \quad \text{KB s.70}$$

$$\delta^F = \frac{N L}{A E} \quad \text{KB s.25}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$(3) \begin{cases} \delta_{al} = L \alpha_{al} \Delta T + \frac{N_{al} \cdot L}{A_{al} E_{al}} \\ \delta_s = L \alpha_s \Delta T + \frac{N_s L}{A_s E_s} \end{cases}$$

$$(1) \cong (2) \Rightarrow (3)$$

$$\cancel{L} \alpha_{al} \Delta T - \frac{N_s \cdot \cancel{L}}{A_{al} E_{al}} = \cancel{L} \alpha_s \Delta T + \frac{N_s \cancel{L}}{A_s E_s}$$

$$N_s \left( \frac{1}{A_{al} E_{al}} + \frac{1}{A_s E_s} \right) = (\alpha_{al} - \alpha_s) \Delta T$$

Kommentar:  
L har ingen betydelse för krafterna ty lika långa.

3.2 forts.

Termisk belastning

$$N_s = \frac{(23,5-12) \cdot 10^{-6} \cdot 180}{\frac{1}{2121 \cdot 70 \cdot 10^3} + \frac{1}{707 \cdot 210 \cdot 10^3}} = 153666 \cdot \text{N}$$

$$N_{al} = -N_s = -153666 \text{ N}$$

$$\sigma_s = \frac{N_s}{A_s} = \frac{153666}{70,7} = \underline{\underline{217 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_{al} = \frac{N_{al}}{A_{al}} = \frac{-153666}{2121} = \underline{\underline{-72 \text{ MPa}}}$$

$$\delta = \delta_{al} = \delta_s = 300 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 180 + 217 \cdot \frac{300}{210 \cdot 10^3} = \underline{\underline{0,96 \text{ mm}}}$$

Kontrollräkna även  $\delta_{al}$

$$\delta_{al} = 300 \cdot 23,5 \cdot 10^{-6} \cdot 180 - 72 \cdot \frac{300}{70 \cdot 10^3} = 0,96 \text{ mm} \quad \text{OK!!!}$$

EduME – Educal

Sökt:  $\sigma_m, \sigma_s, \delta_B$

Givet:  $\Delta T = 50^\circ\text{C}$

$$E_m = 105 \text{ GPa} \quad \alpha_m = 19,6 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

$$E_s = 210 \text{ GPa} \quad \alpha_s = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

Superposition

- \* Släpp A fri  $\Rightarrow$  beräkna  $\delta$  (enda last är  $\Delta T$ )
- \* Beräkna kraft som trycker tillbaka  $\delta$

$$\delta = \alpha_s \cdot \Delta T \cdot 250 + \alpha_m \cdot \Delta T \cdot 300 = 50 (12 \cdot 250 + 19,6 \cdot 300) \cdot 10^{-6}$$

$$\delta = 0,444 \text{ mm}$$

$$\Delta L = L \alpha \Delta T$$

KB s. 70

$$\delta = \frac{F \cdot 250 \cdot 4}{30^2 \cdot \pi \cdot 210 \cdot 10^3} + \frac{F \cdot 300 \cdot 4}{50^2 \cdot \pi \cdot 105 \cdot 10^3} = 0,444$$

$$F = 141432 \text{ N}$$

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

KB s. 25

$$\sigma_s = \frac{141432 \cdot 4}{30^2 \cdot \pi} = 200 \text{ MPa (tryck)}$$

$$\sigma_m = \frac{141432 \cdot 4}{50^2 \cdot \pi} = 72 \text{ MPa (tryck)}$$

$$\delta_m^F = \frac{FL}{AE} = -\sigma_m \frac{L}{E_m} = -72 \cdot \frac{300}{105 \cdot 10^3} = -0,206 \text{ pga kraften}$$

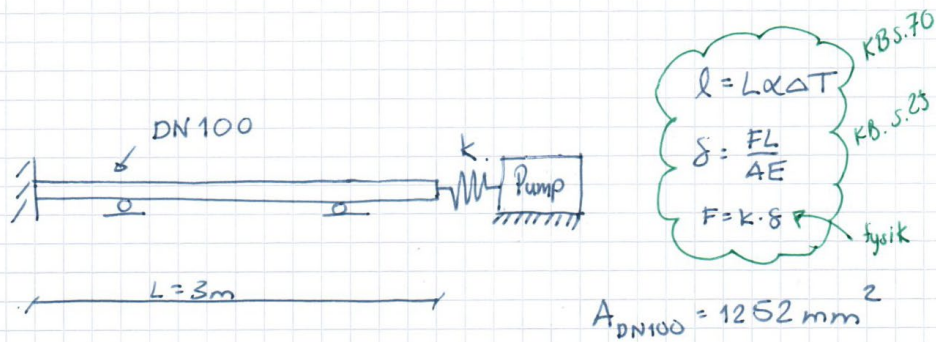
$$\delta_m^T = \alpha_m \Delta T \cdot 300 = 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 300 = 0,294 \text{ mm}$$

$$\delta_B = 0,294 - 0,206 = 0,088 \text{ mm}$$

Tänk på att:

$$\delta_s^T + \delta_s^F + \delta_m^F + \delta_m^T = 0$$

pos      neg      neg      pos



$$F_{\text{max}}^{\text{pump}} = 1200 \text{ N}$$

$$\delta^T = L \alpha \Delta T = 3000 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 4,32 \text{ mm}$$

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{1200}{4,32} = 278 \text{ N/mm}$$

Antagit:  $\delta^T = \delta_{\text{fjäder}}$  ok om  $\delta_{\text{fjäder}} \gg \delta_{\text{DN}100}$

Kontrollera  $\delta_{\text{DN}100}$  om  $F=1200\text{N}$ .

$$\delta = \frac{FL}{AE} = \frac{1200 \cdot 3000}{1252 \cdot 210 \cdot 10^3} = 0,014 \text{ mm}$$

Antagandet är ok ty i princip all termisk expansion tas upp av bälgen

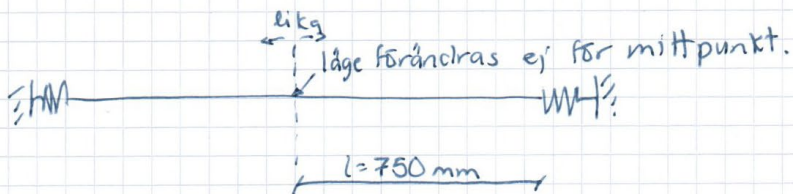
Svar:  $k = 278 \text{ N/mm}$

Sökt:  $\sigma_{stäng}$

Givet:  $k = 1500 \text{ N/mm}$   $\delta_0 = 4 \text{ mm}$

Inse: kraften i stängen = fjädrarna blir lika vid  $\Delta T$ .

Om man ser att det är symmetri är det oftast enkelt att räkna på halva strukturen.



Vid montering  $F_0 = k \cdot \delta_0 = 1500 \cdot 4 = 6000 \text{ N}$

$T = 15^\circ$   $\Delta T = 0$



$T = 200^\circ \Rightarrow \Delta T = 200 - 15 = 185^\circ \text{C}$



$\delta$  är förlängningen hos stängen och hoptryckning hos fjädrarna.

$$\delta = \delta^T - \frac{F \cdot l}{AE} \stackrel{(1)}{=} \frac{F - F_0}{k} = \frac{F}{k} - \frac{F_0}{k} = \frac{F}{k} - \delta_0 \quad (2)$$

$$\delta^T = l \alpha \Delta T = 750 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 185 = 1,665 \text{ mm}$$

3.5 fortsättning

Termisk belastning

$$(2) \quad \delta^T - \frac{FL}{AE} = \frac{F}{k} - \delta_0$$

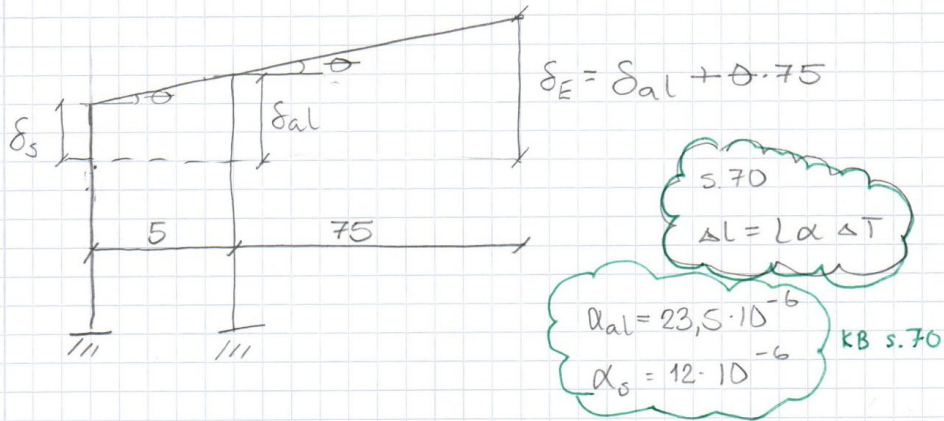
$$\delta^T + \delta_0 = F \left( \frac{L}{AE} + \frac{1}{k} \right)$$

$$F = \frac{1,665 + 4}{\frac{750}{3^2 \cdot \pi \cdot 210 \cdot 10^3} + \frac{1}{1500}} = 7144 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{7144}{3^2 \cdot \pi} \approx 253 \text{ MPa}$$



Sökt:  $\delta_E$  vid  $\Delta T = 40^\circ$



små  $\theta \Rightarrow b = \Delta y \quad b = r\theta$

$$\theta = \frac{b}{r} = \frac{\delta_{al} - \delta_s}{5} = \frac{0,0161}{5} = 3,22 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_{al} - \delta_s = \Delta T \cdot L (\alpha_{al} - \alpha_s) = 40 \cdot 35 (23,5 - 12) \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{al} - \delta_s = 0,0161 \text{ mm} \quad \uparrow$$

$$\delta_{al} = 40 \cdot 35 \cdot 23,5 \cdot 10^{-6} = 0,0329 \text{ mm}$$

$$\delta_E = 0,0329 + \underbrace{3,22 \cdot 10^{-3} \cdot 75}_{0,24 \text{ mm}} = \underline{\underline{0,27 \text{ mm}}}$$

Sökt:  $\sigma_{AC}$ ,  $\sigma_{CE}$ ,  $\delta_{AC}$

Givet:  $E_m = 105 \text{ GPa}$   $\alpha_m = 19,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$   $\Delta T = 80^\circ\text{C}$   
 $E_s = 200 \text{ GPa}$   $\alpha_s = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$

- Bestäm  $\delta_{tot}^T$  pga  $\Delta T$ , utan högra väggen

$$\delta_{tot}^T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 300 + 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 200 = 0,6016 \text{ mm}$$

- Bestäm  $F$  som trycker tillbaka  $\delta_{tot}^T - 0,12$  KB s.25

$$0,6016 - 0,12 = \frac{F \cdot 300 \cdot 4}{40^2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot 10^3} + \frac{F \cdot 200 \cdot 4}{30^2 \cdot \pi \cdot 105 \cdot 10^3}$$

$$F = 123857 \text{ N}$$

$$\delta = \frac{FL}{AE} \quad \text{KB s. 70}$$

$$\Delta l = l \alpha \Delta T$$

$$\sigma_{AC} = \frac{123857 \cdot 4}{40^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{98,6 \text{ MPa}}} \text{ (tryck)}$$

$$\sigma_{CE} = \frac{123857 \cdot 4}{30^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{175 \text{ MPa}}} \text{ (tryck)}$$

$$\delta_{AC} = \delta_{AC}^T - \delta_{AC}^F = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 300 - 98,6 \cdot \frac{300}{200 \cdot 10^3} = \underline{\underline{0,14 \text{ mm}}}$$

$$\uparrow \frac{FL}{AE} = \sigma \cdot \frac{L}{E}$$

Sökt:  $\sigma_{AB}$ ,  $\sigma_{CD}$ ,  $\delta_{AB}$

Givet:  $\Delta T = 85^\circ - 15^\circ = 70^\circ$

a) Bestäm  $\delta_{tot}^T$  om inget hindrar längdutvidgning

$$\delta_{tot}^T = 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 300 + 23,5 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 250 = 0,82285 \quad (2)$$

• Bestäm kraften som trycker tillbaka  $\delta_{tot}^T = 0,5$

$$0,82285 - 0,5 = \frac{F \cdot 300 \cdot 4}{50^2 \cdot \pi \cdot 105 \cdot 10^3} + \frac{F \cdot 250 \cdot 4}{75^2 \cdot \pi \cdot 70 \cdot 10^3} \quad (1)$$

$$F = 142631 \text{ N}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{142631 \cdot 4}{50^2 \cdot \pi} = \underline{72,6 \text{ MPa}} \quad (\text{tryck})$$

$$\sigma_{CD} = \frac{142631 \cdot 4}{75^2 \cdot \pi} = \underline{32,3 \text{ MPa}} \quad (\text{tryck})$$

$$\delta_{AB} = \delta_{AB}^T - \delta_{AB}^F = 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 300 - 72,6 \cdot \frac{300}{105 \cdot 10^3} = \underline{0,204 \text{ mm}}$$

$$\frac{FL}{AE} = \sigma \cdot \frac{L}{E} \quad \text{s. 25}$$

b) Bestäm  $F$  som ger  $\sigma_{AB} = -140 \text{ MPa}$

$$F = \sigma_{AB} \cdot A_{AB} = -140 \cdot \frac{50^2 \cdot \pi}{4} = -274889 \text{ N}$$

$$(1) \delta_{tot}^T - 0,5 = \frac{274889 \cdot 4}{\pi \cdot 10^3} \left( \frac{300}{50^2 \cdot 105} + \frac{250}{75^2 \cdot 70} \right)$$

$$\delta_{tot}^T = 1,1222 \text{ mm}$$

$$(2) \Rightarrow \delta_{tot}^T = \Delta T (19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 300 + 23,5 \cdot 10^{-6} \cdot 250) = 1,1222$$

$$\Delta T = 95,5^\circ \text{C} \quad T = 95,5^\circ \text{C} + 15^\circ \text{C} = \underline{110,5^\circ \text{C}}$$

$$\delta_{AB} = 19,6 \cdot 10^{-6} \cdot 95,5 \cdot 300 - 140 \cdot \frac{300}{105 \cdot 10^3} = \underline{0,161 \text{ mm}}$$