

# HÅLLFASTHETSLÄRA ÖVNINGSUPPGIFTER LÖSNINGAR

Datum: 2022-07-23

Lösningarna till övningsuppgifterna är ett levande dokument. Jag fyller på med lösningar, gör förbättringar och rättar de slarvfel som är svåra att undvika när man utvecklar material.

På YouTube kanalen, "EduME:s Övningsuppgifter i hållfasthetslära", finns inspelade lösningsförslag till många av uppgifterna. Flera uppgifterna finns även på spellistor med introducerande teori på olika avsnitt.

Det är fritt fram att använda detta material för dig som undervisar, men materialet ersätter inte en bra handledning av elever/studenter.

Häftet får inte editeras eller omarbetas.

Dela med dig av kanalen till dina studenter och/eller bädda in lämpliga videos på din lärplattform.

Jag använder mig av Karl Björks "Formler och Tabeller för Mekanisk konstruktion" när jag löser uppgifterna. Denna finns att beställa på [bjorksforlag.se](http://bjorksforlag.se)

En komplett översikt av kanalen och materialet finns på [edume.nu](http://edume.nu)

*/Madeleine*



<https://www.youtube.com/channel/UCZWty6uAUlkab9XyHQIAu9Q>



Madeleine Hermann

EduME – Education and Mechanical Engineering

6. Moment och tvärkraftsdiagram

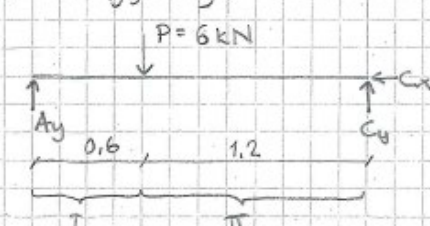
6.1

Moment och tvärkraftsdiagram

**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**

Såkt: M & T-diagram,  $M_{max}$ ,  $T_{max}$

① Frläggning



Stödkrafter

$\rightarrow C_x = 0$

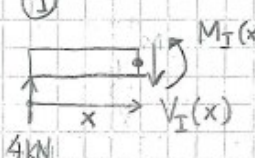
$\curvearrowleft C_y \cdot 1,8 - 6 \cdot 0,6 = 0$

$C_y = 2 \text{ kN}$

$\uparrow A_y + C_y - 6 = 0 \Rightarrow A_y = 6 - 2 = 4 \text{ kN}$

② Bestäm  $M(x)$  &  $T(x)$  för I & II.

①

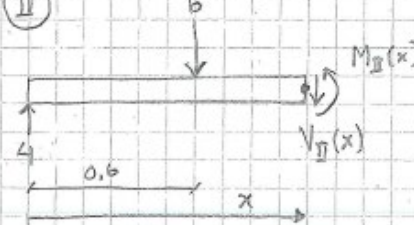


$\downarrow V_I(x) - 4 = 0 \Rightarrow V_I(x) = 4$

$\curvearrowleft M_I(x) - 4x = 0 \Rightarrow M_I(x) = 4x$

Gäller  $0 \leq x \leq 0,6$

②



$\downarrow V_{II}(x) + 6 - 4 = 0 \Rightarrow V_{II}(x) = -2$

$\curvearrowleft M_{II}(x) + 6(x - 0,6) - 4x = 0$

$M_{II}(x) = -2x + 3,6$

③ Bestäm gränsvärden

$V_I(0) = V_I(0,6) = 4$

$M_I(0) = 0$  (förstås)

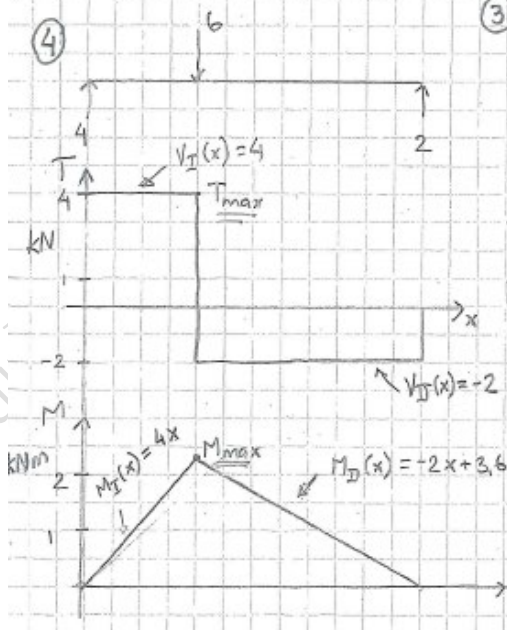
$M_I(0,6) = 2,4$

$V_{II}(0,6) = V_{II}(1,8) = -2$

$M_{II}(0,6) = 2,4$

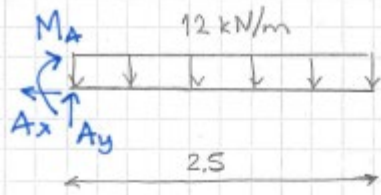
$M_{II}(1,8) = 0$  (förstås)

④



$T_{max} = 4 \text{ kN}$

$M_{max} = 2,4 \text{ kNm}$

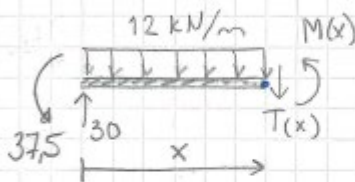
**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**Sökt: T- och M-diagram,  $T_{max}$ ,  $M_{max}$ 

$$\rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow A_y - 12 \cdot 2,5 = 0 \Rightarrow A_y = 30 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft M_A + 12 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} = 0$$

$$M_A = -37,5 \text{ kNm}$$

EH kontinuerligt område

$$\downarrow T(x) + 12x - 30 = 0 \quad T(x) = -12x + 30$$

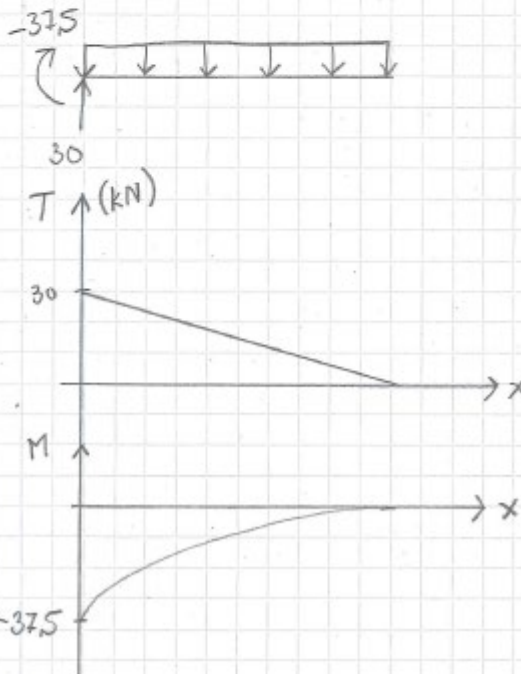
$$\curvearrowleft M(x) + 12x \cdot \frac{x}{2} - 30x + 37,5 = 0$$

$$M(x) = 30x - 6x^2 - 37,5$$

Gränsvärden

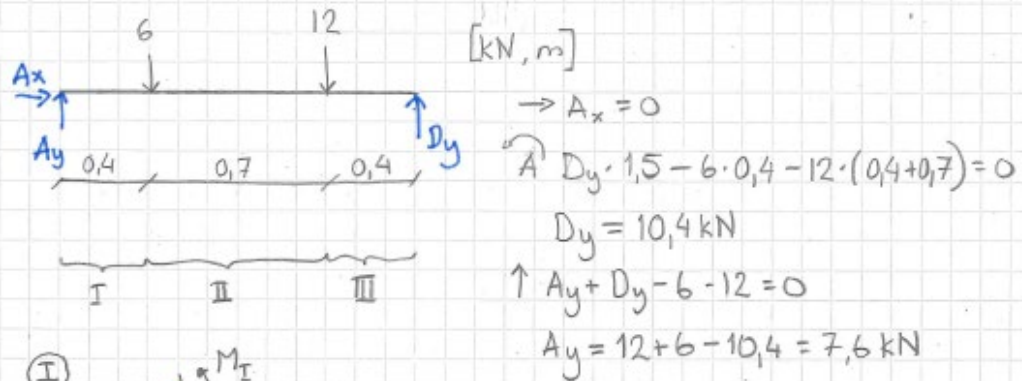
$$T(0) = 30 \text{ kN} \quad T(2,5) = -12 \cdot 2,5 + 30 = 0$$

$$M(0) = -37,5 \text{ kNm} \quad M(2,5) = 30 \cdot 2,5 - 6 \cdot 2,5^2 - 37,5 = 0$$



$$T_{max} = 30 \text{ kN}$$

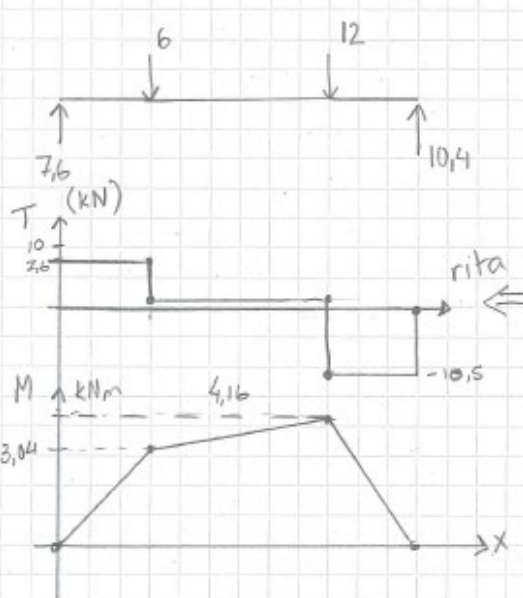
$$|M_{max}| = 37,5 \text{ kNm}$$

**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**

(I)  $\uparrow T_I - 7,6 = 0 \Rightarrow T_I = 7,6$   
 $\curvearrowright M_I - 7,6x = 0 \Rightarrow M_I(x) = 7,6x$

(II)  $\downarrow T_{II} + 6 - 7,6 = 0 \Rightarrow T_{II} = 1,6$   
 $\curvearrowright M_{II} + 6(x - 0,4) - 7,6x = 0$   
 $M_{II}(x) = 1,6x + 2,4$

(III)  $\downarrow T_{III} + 12 + 6 - 7,6 = 0 \Rightarrow T_{III} = -10,4$   
 $\curvearrowright M_{III} + 12(x - 1,1) + 6(x - 0,4) - 7,6x = 0$   
 $M_{III}(x) = -10,4x + 15,6$

Gränsvärden

$$T_I(0) = T_I(0,4) = 7,6 \text{ kN}$$

$$T_{II}(0,4) = T_{II}(1,1) = 1,6 \text{ kN}$$

$$T_{III}(1,1) = T_{III}(1,5) = -10,5 \text{ kN}$$

$$M_I(0) = 0 \quad M_I(0,4) = 3,04 \text{ kNm}$$

$$M_{II}(0,4) = 3,04 \text{ kNm}$$

$$M_{II}(1,1) = 4,16 \text{ kNm}$$

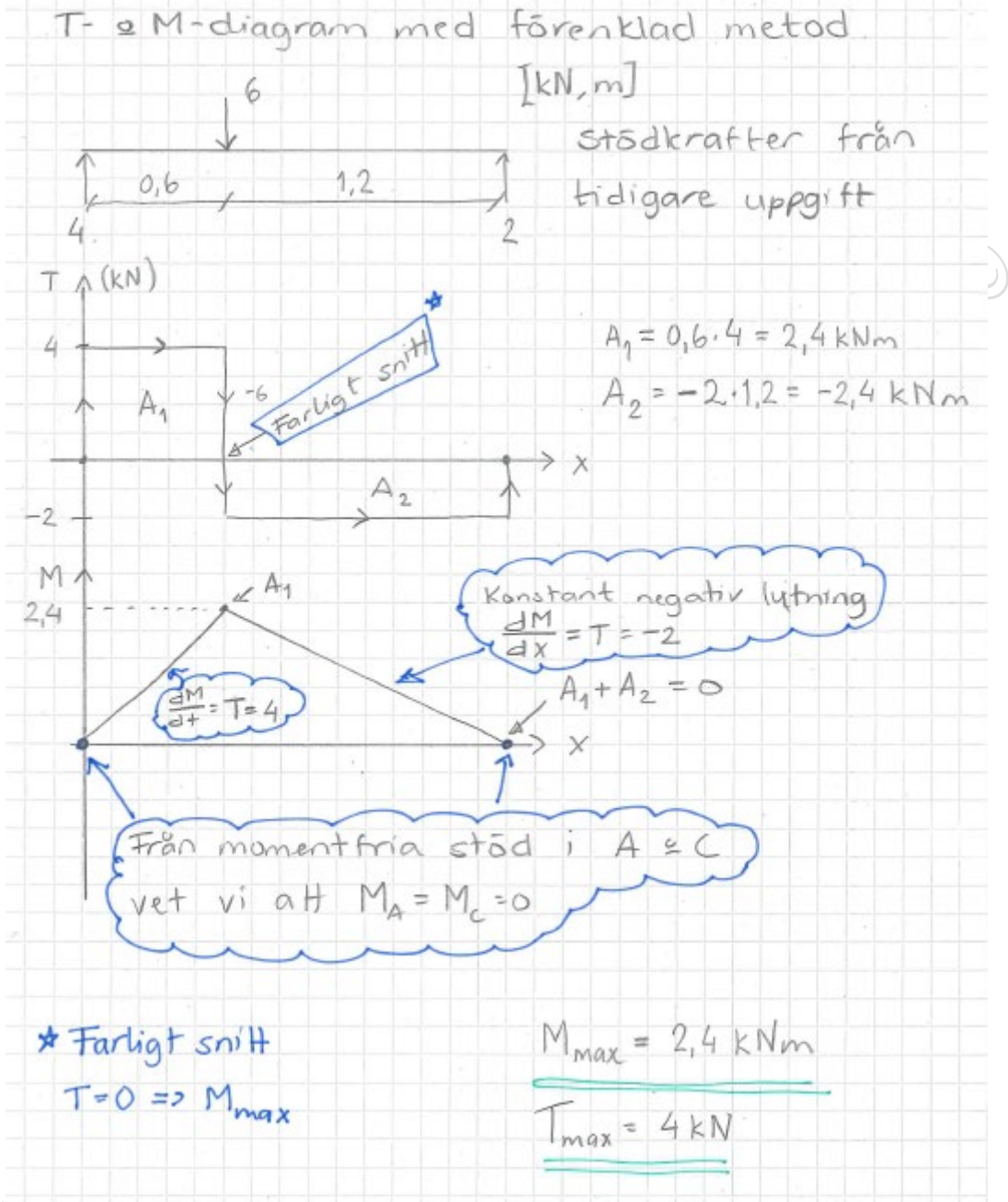
$$M_{III}(1,1) = 4,16 \text{ kNm}$$

$$M_{III}(1,5) = 0$$

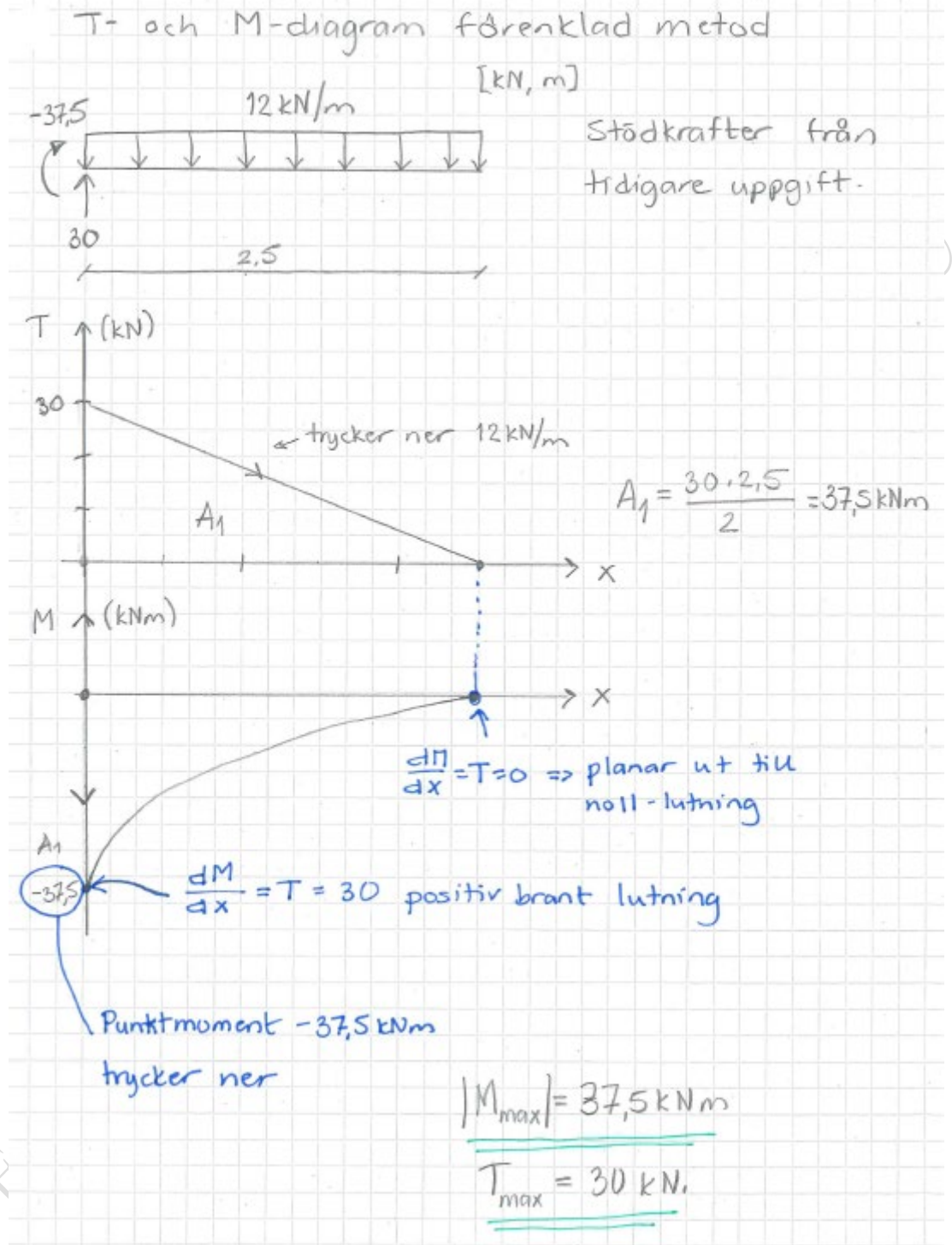
$$|T_{\max}| = 10,5 \text{ kN}$$

$$|M_{\max}| = 4,16 \text{ kNm}$$

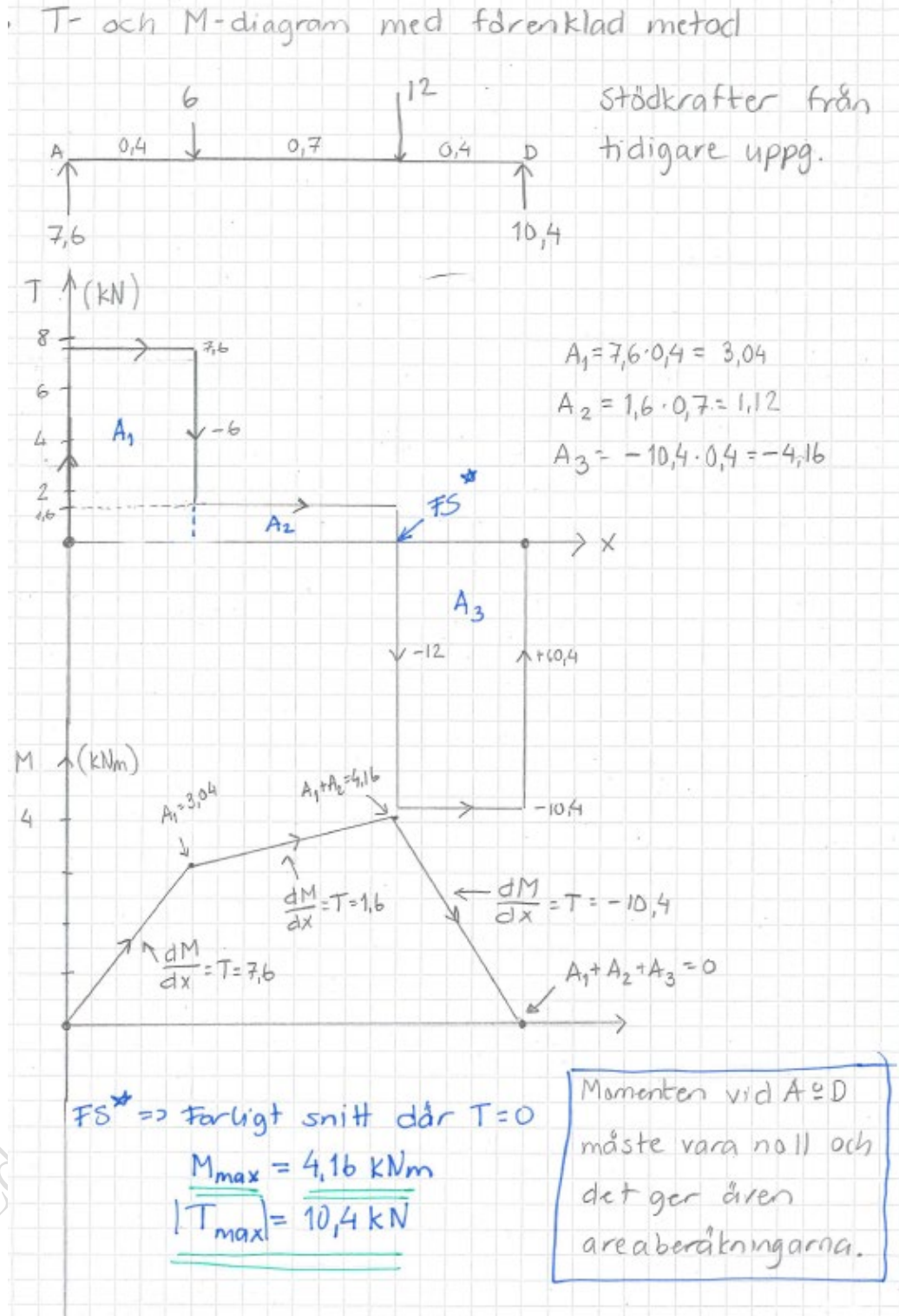
**OBS!!!  $V(x)$  är  $T(x)$  i lösningen.**

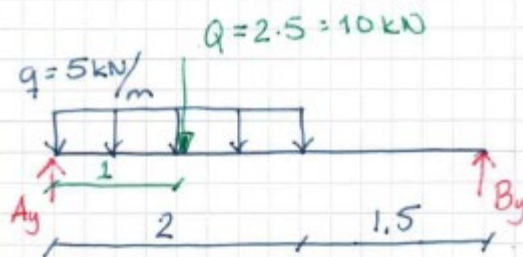


**OBS!!!  $V(x)$  är  $T(x)$  i lösningen.**



**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**

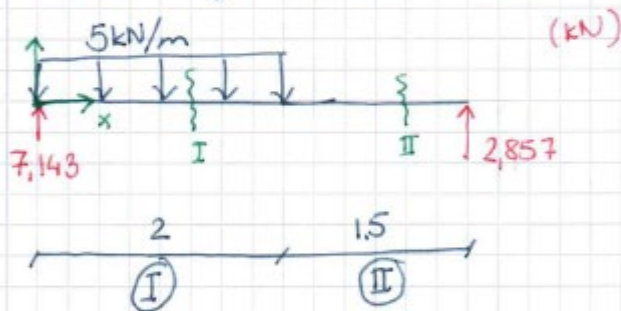




$$\curvearrowleft A \quad B_y \cdot 3,5 - 10 \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_y = 2,857 \text{ kN}$$

$$\uparrow A_y + B_y - 10 = 0 \quad A_y = 10 - 2,857 = 7,143 \text{ kN}$$

TVå kontinuerliga områden ger två uppsättningar av ekvationer. (I) = (II)



Snitt I (på avståndet  $x$  från A)

$5x$  ← totala lasten  $Q$  över längden  $x$ .

$$\curvearrowleft M_I(x) + 5x \cdot \frac{x}{2} - 7,143x = 0$$

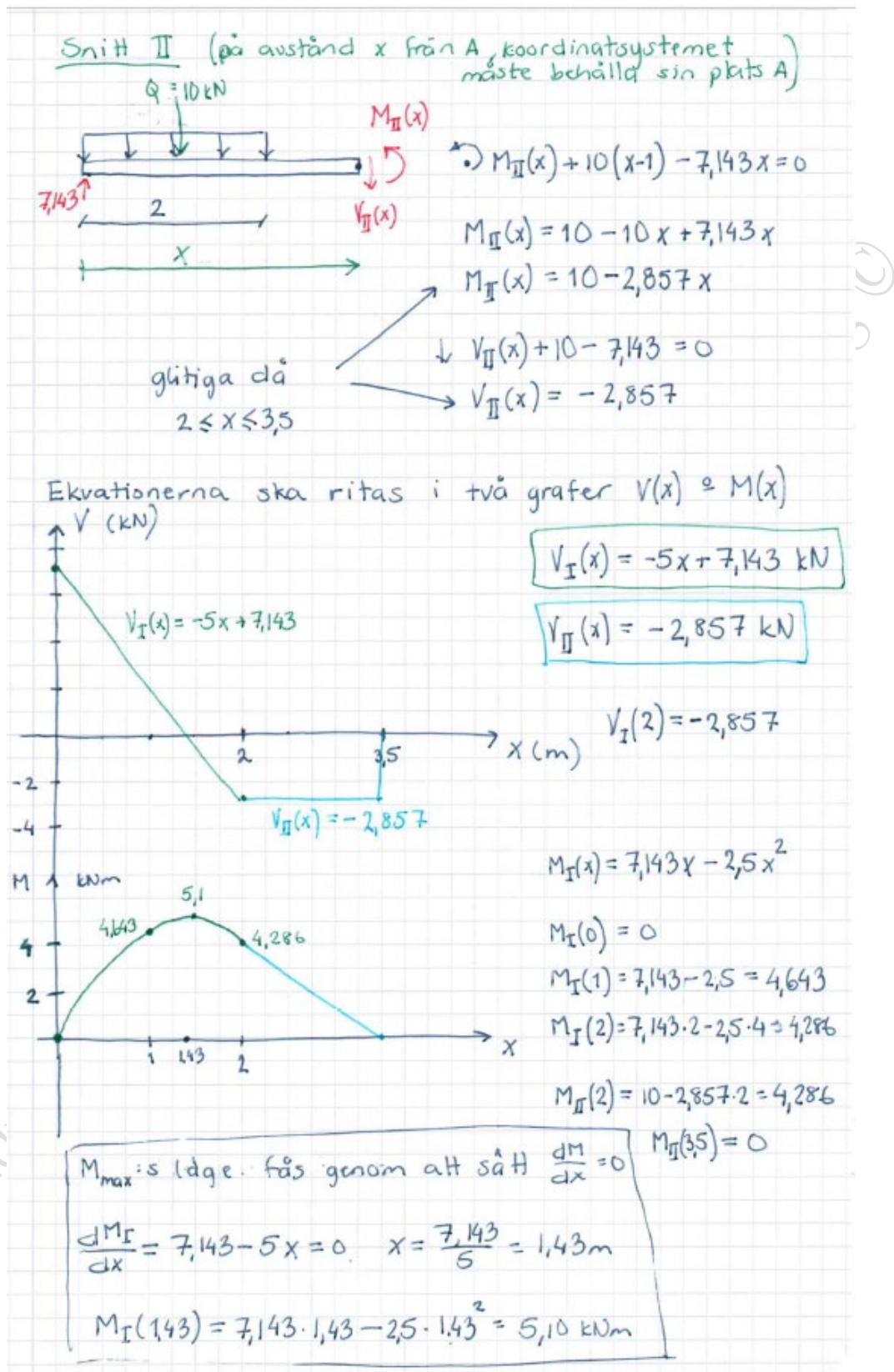
$$M_I(x) = 7,143x - 2,5x^2$$

$$\downarrow V_I(x) + 5x - 7,143 = 0$$

$$\rightarrow V_I(x) = 7,143 - 5x$$

glitiga då  
 $0 \leq x \leq 2$





Se samband.

$$V_I(x) = -5x + 7,143$$

↑  
q

$$M_I(x) = -2,5x^2 + 7,143x$$

$$\frac{dM_I}{dx} = -2 \cdot 2,5x + 7,143$$

$$\frac{dM_I}{dx} = -5x + 7,143 = V_I(x)$$

Värdet av  $V(x)$  ger  $M(x)$ 's lutning

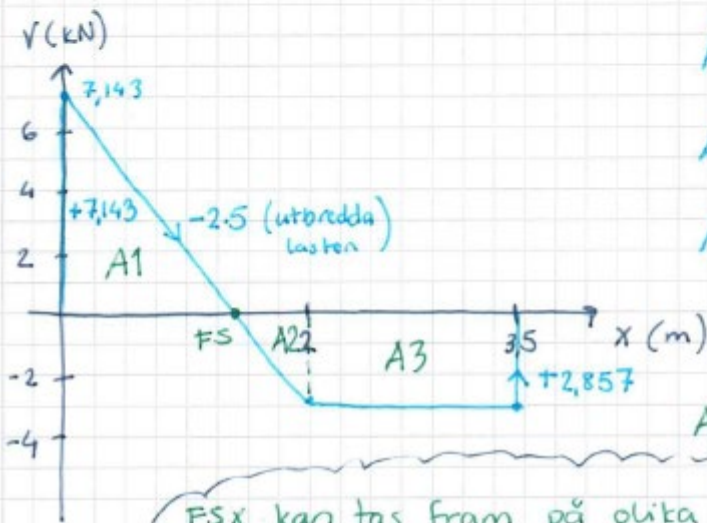
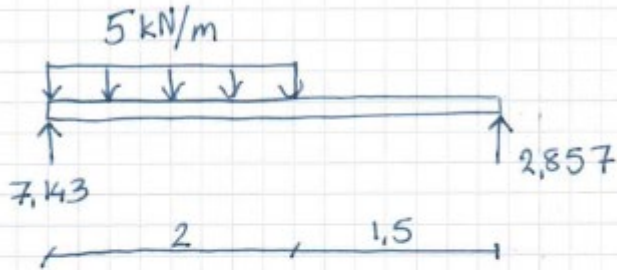
Om derivatan av  $M(x)$  ger  $V(x)$  så

är integralen av  $V(x) \Rightarrow M(x)$  (andra hållet)

Arean av  $V(x) \Rightarrow$  Momentet.

EduME – Education and Mechanical Engineering

Förenklad metod



$$A1 = \frac{7,143 \cdot 1,43}{2} = 5,107$$

$$A2 = \frac{-2,857 \cdot 0,07}{2} = -0,819$$

$$A3 = -2,857 \cdot 1,5 = 4,286$$

tas fram  
nedan

FSx kan tas fram på olika sätt.

$$y = kx + m \Rightarrow V = -5x + 7,143 \quad V(x) = 0 \quad -5x + 7,143 = 0$$

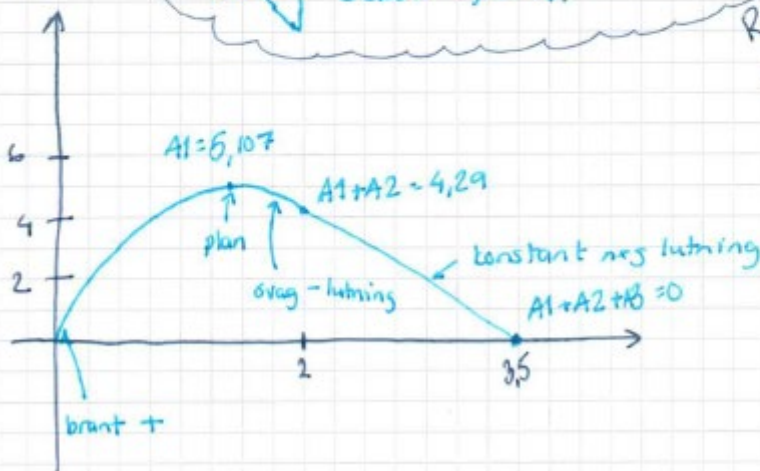
$$x = 1,43 \text{ m}$$

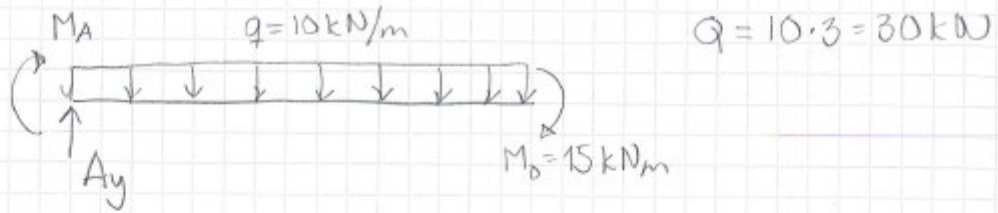


triangel likformighet kan  
också ge x.

Rita helst inget  
mellan  $V$  &  $M$ -  
diagrammen

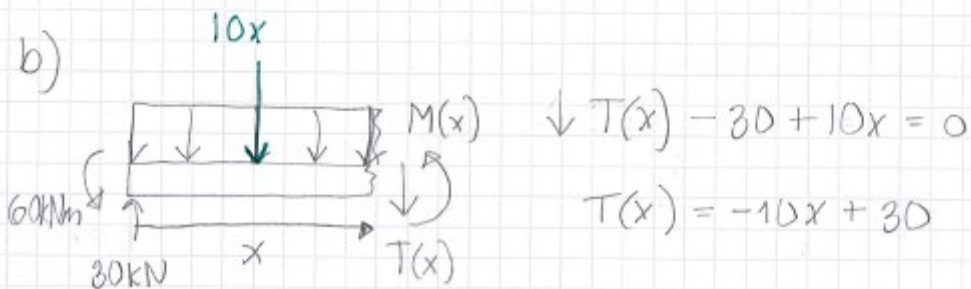
M (kNm)





$$\uparrow A_y - 30 = 0 \quad A_y = 30 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft M_A + 15 + 30 \cdot \frac{3}{2} = 0 \quad M_A = -60 \text{ kNm}$$



$$\downarrow T(x) - 30 + 10x = 0$$

$$T(x) = -10x + 30$$

$$\curvearrowleft M(x) + 60 + 10x \cdot \frac{x}{2} - 30x = 0$$

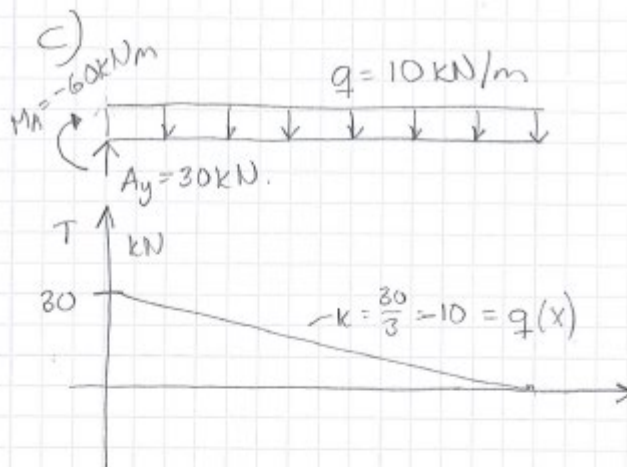
$$M(x) = -5x^2 + 30x - 60$$

$$T(x) = \frac{dM}{dx} = -10x + 30$$

Vad händer om vi tar  $\frac{dT}{dx}$

$$\frac{dT}{dx} = -10 = q(x)$$

← Viktiga samband e bygger på  
fritagging enligt reglerna

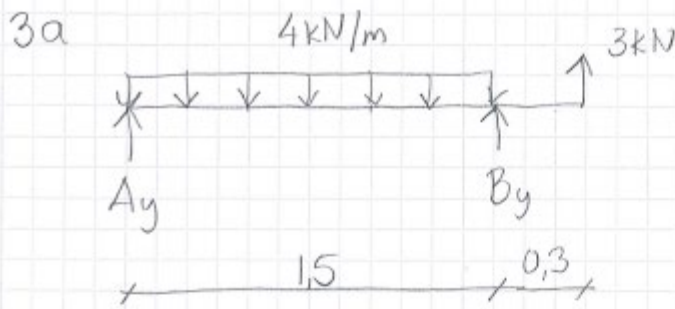


d) Förenklade

$$A = 30 \cdot \frac{3}{2} = 45$$

Beskriv  $T(x)$

Beskriv areorna  $\hat{=}$  lutning av  $M(x)$

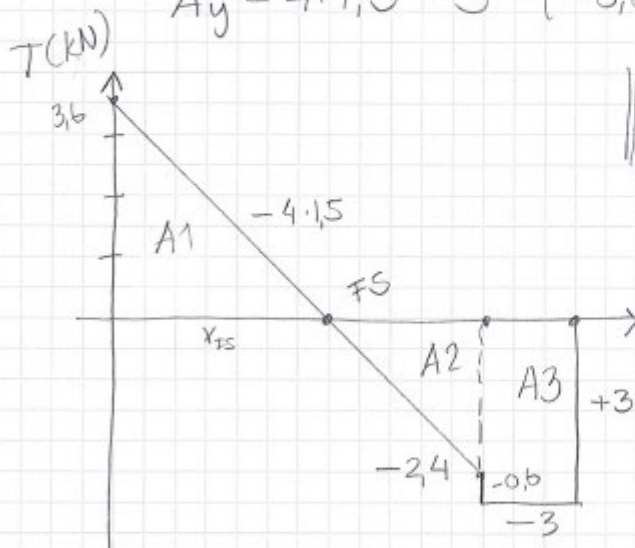


$$\sum \overset{\curvearrowleft}{A} 3(1,5+0,3) - 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{1,5}{2} + B_y \cdot 1,5 = 0$$

$$B_y = -0,6 \text{ kN}$$

$$\uparrow A_y + B_y + 3 - 4 \cdot 1,5 = 0$$

$$A_y = 4 \cdot 1,5 - 3 - (-0,6) = 3,6 \text{ kN}$$



Ekv  $T(x)$  lätt att bestämma

$$T(x) = -4x + 3,6$$

FS då  $T(x) = 0$

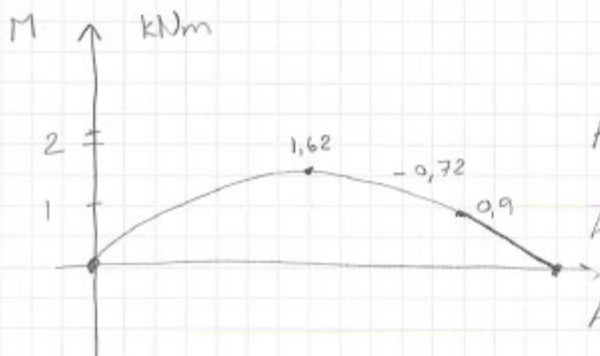
$$-4x + 3,6 = 0$$

$$x = 0,9 \text{ m}$$

$\Delta$ -likformighet

$$\frac{3,6 + 2,4}{1,5} = \frac{3,6}{x_{FS}}$$

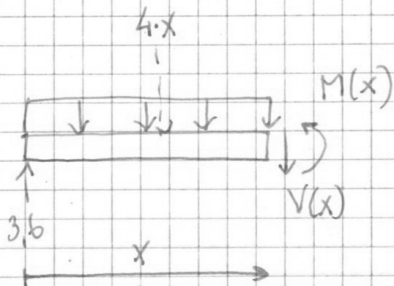
$$x_{FS} = 0,9$$



$$A_1 = \frac{3,6 \cdot 0,9}{2} = 1,62$$

$$A_2 = \frac{-2,4 \cdot (1,5 - 0,9)}{2} = -0,72$$

$$A_3 = -3 \cdot 0,3 = -0,9$$



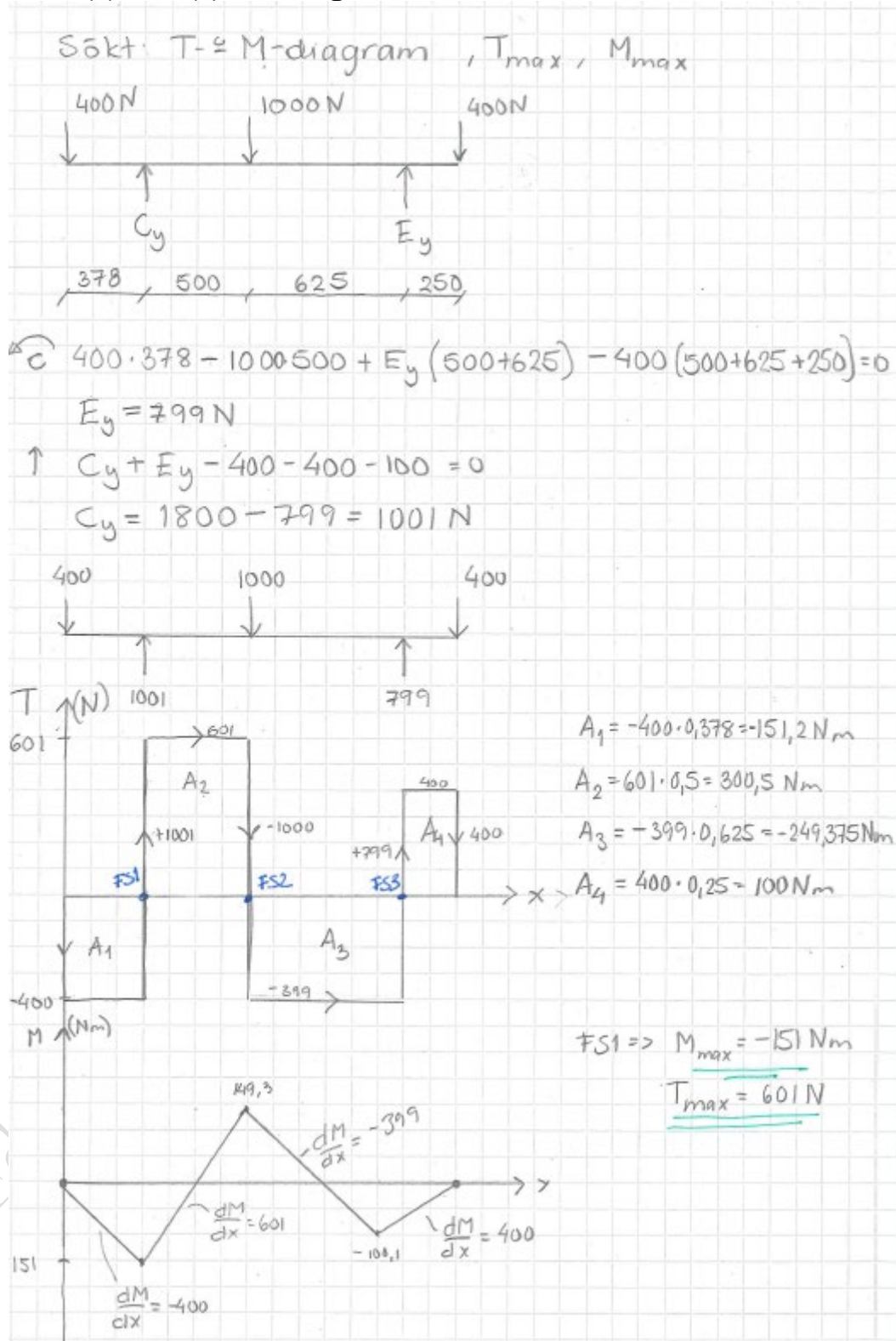
$M(x) + 4x \cdot \frac{x}{2} - 3,6x = 0$   
 $M(x) = 3,6x - 2x^2$

$V(x) + 4x - 3,6 = 0$

$V(x) = -4x + 3,6$

Detta visades redan  
 innan genom  $y = kx + m$   
 Samma resultat på  
 två sätt! Toppen!

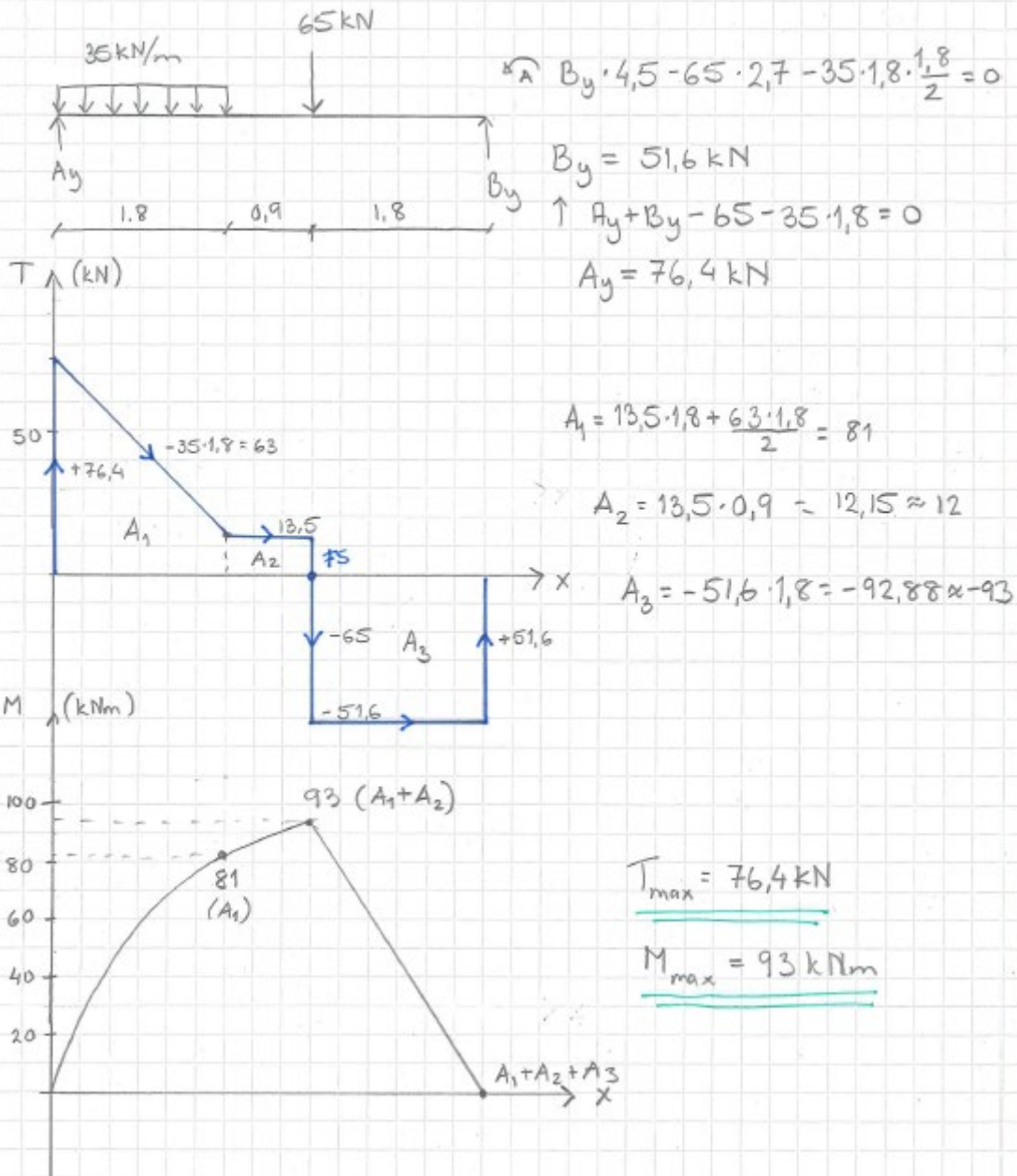
**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**





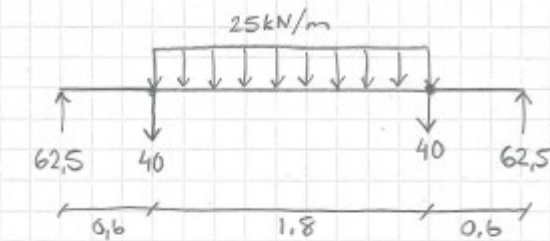
**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**

Sökt: T- = M-diagram,  $T_{max}$ ,  $M_{max}$



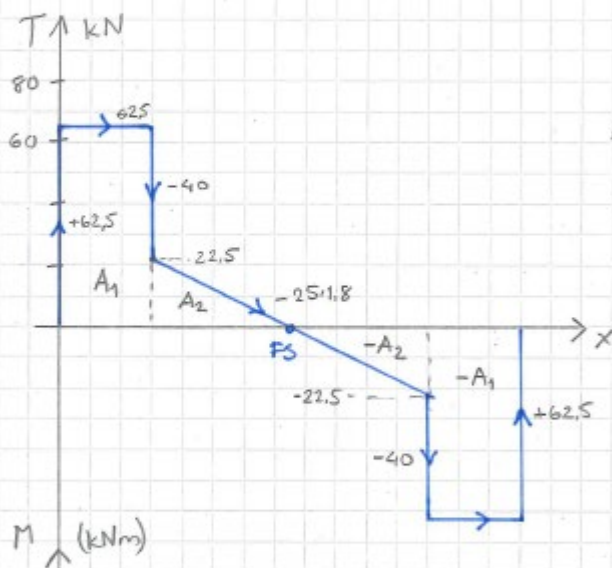
**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**

Sökt: T- och M-diagram,  $T_{max}$ ,  $M_{max}$



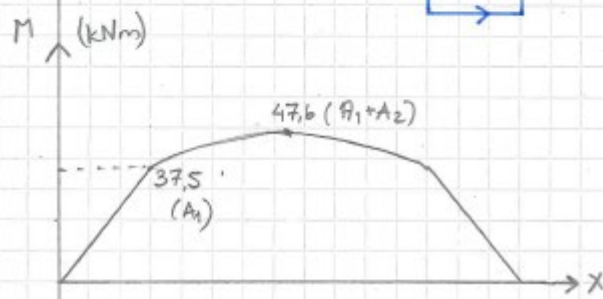
Symmetri i last och geometri

$$\Rightarrow A_y = B_y = (2 \cdot 40 + 25 \cdot 1,8) \cdot \frac{1}{2} = 62,5 \text{ kN}$$



$$A_1 = 62,5 \cdot 0,6 = 37,5$$

$$A_2 = \frac{22,5 \cdot 0,9}{2} = 10,125$$

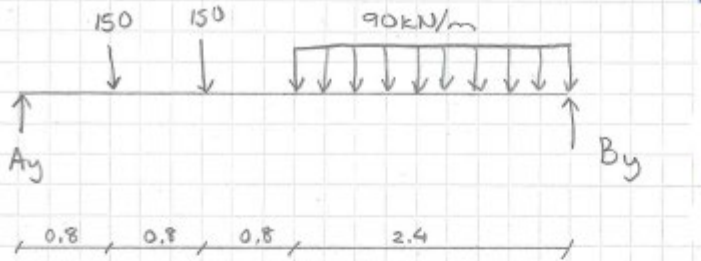


$$\underline{T_{max} = 62,5 \text{ kN}}$$

$$\underline{M_{max} = 47,6 \text{ kNm}}$$

**OBS!!! V(x) är T(x) i lösningen.**

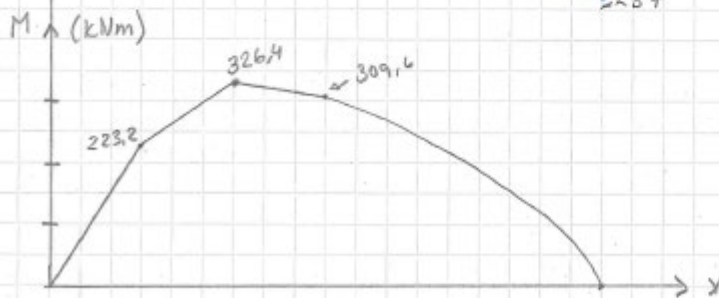
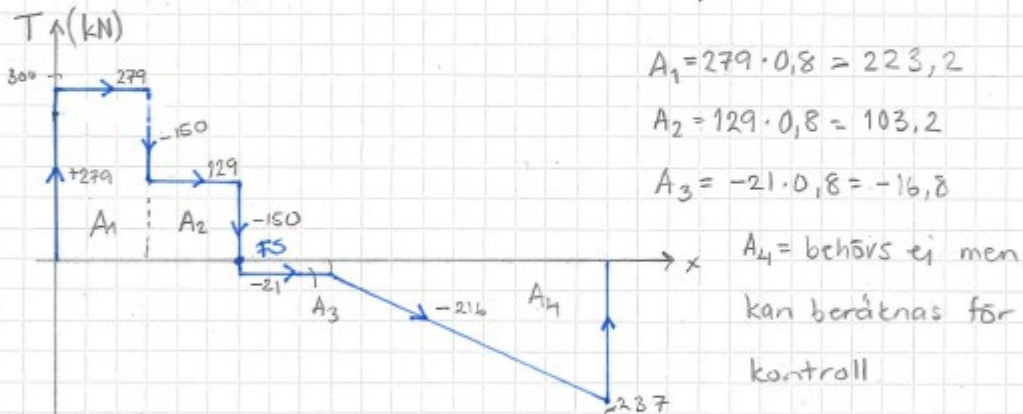
∴ Sökt: T- & M-diagram,  $T_{max}$ ,  $M_{max}$ , ...



$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad B_y \cdot 4,8 - 150 \cdot 0,8 - 150 \cdot 1,6 - 90 \cdot 2,4 \cdot (2,4 + 1,2) = 0$$

$$B_y = 237 \text{ kN}$$

$$\uparrow \quad A_y + B_y - 2 \cdot 150 - 90 \cdot 2,4 = 0 \Rightarrow A_y = 279 \text{ kN}$$



$$M_{max} = 326,4 \text{ kNm} \quad (\text{FS förlagt snitt då } T=0)$$

$$T_{max} = 279 \text{ kN}$$

6.14

Moment och tvärkraftsdiagram

Sökt: a) Stödreaktioner  
b) V- och M-diagram

