

HÅLLFASTHETSLÄRA ÖVNINGSUPPGIFTER LÖSNINGAR

Datum: 2022-07-23

Lösningarna till övningsuppgifterna är ett levande dokument. Jag fyller på med lösningar, gör förbättringar och rättar de slarvfel som är svåra att undvika när man utvecklar material.

På YouTube kanalen, "EduME:s Övningsuppgifter i hållfasthetslära", finns inspelade lösningsförslag till många av uppgifterna. Flera uppgifterna finns även på spellistor med introducerande teori på olika avsnitt.

Det är fritt fram att använda detta material för dig som undervisar, men materialet ersätter inte en bra handledning av elever/studenter.

Häftet får inte editeras eller omarbetas.

Dela med dig av kanalen till dina studenter och/eller bädda in lämpliga videos på din lärplattform.

Jag använder mig att Karl Björks "Formler och Tabeller för Mekanisk konstruktion" när jag löser uppgifterna. Denna finns att beställa på bjorksforlag.se

En komplett översikt av kanalen och materialet finns på edume.nu

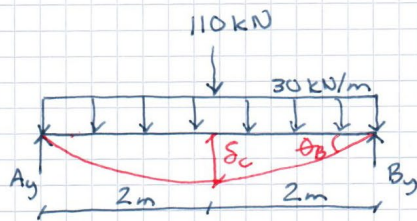
/Madeleine

 <https://www.youtube.com/channel/UCZWty6uAUIkab9XyHQIAu9Q>



Madeleine Hermann

EduME – Education and Mechanical Engineering

Sökt: δ_c och θ_B 

Tvårsnitt IPE 360 KB 5.65

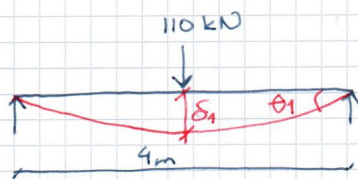
$$I = I_x = 16270 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$EI = 210 \cdot 10^3 \cdot 16270 \cdot 10^4 = 3,4167 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

Anta utböjningsform

Inför beteckningar, $\delta_c \approx \theta_B$

=



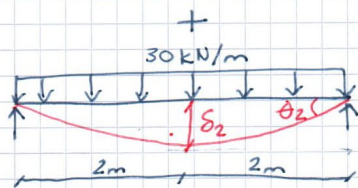
Fall 5 KB. s. 29

$$\delta_1 = f \quad \left. \begin{array}{l} F = 110 \cdot 10^3 \text{ N} \\ L = 4000 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

$$\theta_1 = \varphi_a$$

$$\delta_1 = \frac{FL^3}{48EI} = \frac{110 \cdot 10^3 \cdot 4000^3}{48 \cdot 3,4167 \cdot 10^{13}} = 4,293 \text{ mm}$$

$$\theta_1 = \frac{FL^2}{16EI} = \frac{110 \cdot 10^3 \cdot 4000^2}{16 \cdot 3,4167 \cdot 10^{13}} = 3,219 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



Fall 10 KB. s. 30

$$\delta_2 = f \quad \left. \begin{array}{l} Q = 30 \cdot 4 = 120 \text{ kN} \\ L = 4000 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

$$\theta_2 = \varphi_a$$

$$\delta_2 = \frac{5QL^3}{384EI} = \frac{5 \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 4000^3}{384 \cdot 3,4167 \cdot 10^{13}} = 2,927 \text{ mm}$$

$$\theta_2 = \frac{QL^2}{24EI} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 4000^2}{24 \cdot 3,4167 \cdot 10^{13}} = 2,341 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_c = \delta_1 + \delta_2 = 4,293 + 2,927 = 7,22 \text{ mm}$$

$$\theta_B = \theta_1 + \theta_2 = 3,219 \cdot 10^{-3} + 2,341 \cdot 10^{-3} = 5,56 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$= 5,56 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,319^\circ$$

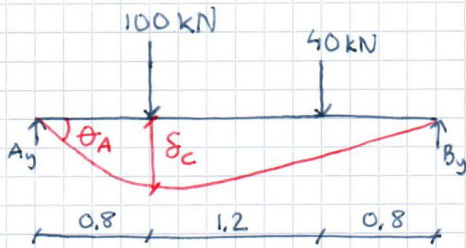
Kommentar: Rita först upp superpositionen (bilderna).

Inför beteckningar ($\delta_c \approx \theta_B \dots \delta_1, \delta_2, \theta_1, \theta_2$)

Bestäm hur de ska kombineras *

Därefter räknar man.

a) Sökt: δ_c , θ_A



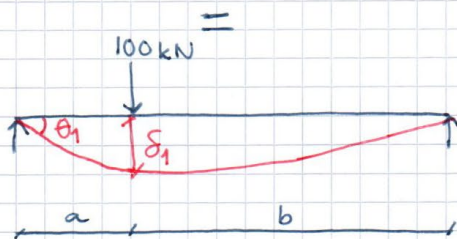
Tvårsnitt IPE 270

$$I = I_x = 5790 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$EI = 5790 \cdot 10^4 \cdot 210 \cdot 10^3 = 1,2159 \cdot 10^{13} \text{ Nmm}^2$$

KB s. 65

① Anta utböjningsform samt ange δ_c , θ_A



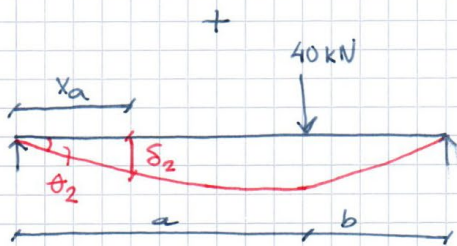
Fall 6 KB. s. 29

$$\delta_1 = f \quad \left. \begin{array}{l} F = 100 \text{ kN} \\ L = 2800 \text{ mm} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a = 800 \text{ mm} \\ b = 2000 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

$$\delta_1 = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 800^2 \cdot 2000^2}{3EI \cdot 2800} = 2,757 \text{ mm}$$

$$\theta_1 = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot 2000 (2800 + 2000)}{6EI \cdot 2800}$$

$$\theta_1 = 4,136 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



Fall 6 KB. s. 29

$$\delta_2 = y_a \text{ då } x_a = 800 \text{ mm} \quad b = 800 \text{ mm} \quad L = 2800 \text{ mm} \quad F = 40 \text{ kN}$$

$$y_a = \frac{Fbx_a(L^2 - b^2 - x_a^2)}{6EIL} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot 800 (2800^2 - 800^2 - 800^2)}{6EI \cdot 2800} = 0,822 \text{ mm}$$

$$\theta_2 = \varphi_a \text{ då } a = 2000 \text{ mm} \quad b = 800 \text{ mm} \quad L = 2800 \text{ mm} \quad F = 40 \text{ kN}$$

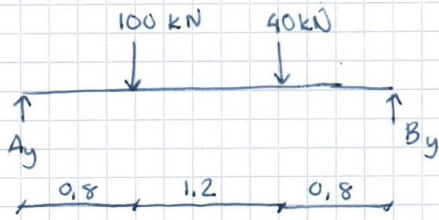
$$\varphi_a = \frac{Fab(L+b)}{6EIL} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2000 \cdot 800 (2800 + 800)}{6EI \cdot 2800} = 1,128 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_c = \delta_1 + \delta_2 = 2,757 + 0,822 = \underline{\underline{3,579 \text{ mm}}}$$

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 4,136 \cdot 10^{-3} + 1,128 \cdot 10^{-3} = 5,264 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = \underline{\underline{0,30^\circ}}$$

8.3b

Balkböjning (superposition)

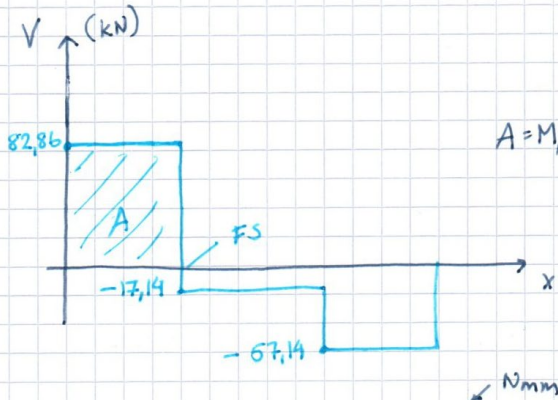
b) Skikt: σ_{max} 

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M} = 0 \quad B_y \cdot 2,8 - 100 \cdot 0,8 - 40 \cdot 2 = 0$$

$$B_y = 57,14 \text{ kN}$$

$$\sum \uparrow F_y = 0 \quad A_y + B_y - 100 - 40 = 0$$

$$A_y = 82,86 \text{ kN}$$



$$A = M_{max} = 82,86 \cdot 0,8 = 66,29 \text{ kNm}$$

Tvärsnitt IPE 270

$$W_x = 429 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

KB 5.65

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{66,29 \cdot 10^6}{429 \cdot 10^3} = \underline{\underline{155 \text{ MPa}}}$$

Sökt: a) δ_A b) θ_A

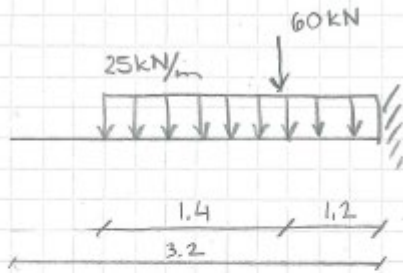
1360 KB s. 65

$$I_x = 19605 \text{ cm}^4 = 19605 \cdot 0,01^4 \text{ m}^4$$

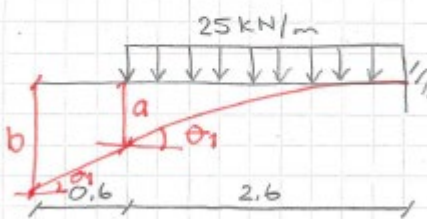
$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$EI = 19605 \cdot 0,01^4 \cdot 210 \cdot 10^9$$

$$EI = 41,17 \cdot 10^6$$



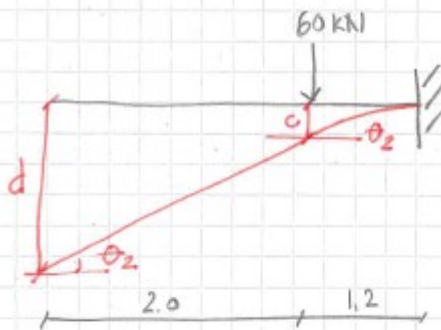
Fall 3 KB s. 29



$$a = f = \left\{ \begin{array}{l} Q = 25 \cdot 10^3 \cdot 2,6 \\ L = 2,6 \end{array} \right\} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2,6^4}{8 \cdot 41,17 \cdot 10^6} = 3,469 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_1 = \varphi_a = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2,6^3}{6 EI} = 1,779 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Fall 2 KB s. 29



$$c = f = \left(L = 1,2 \right) = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}{3 EI} = 8,394 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\theta_2 = \varphi_a = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2}{2 EI} = 1,049 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

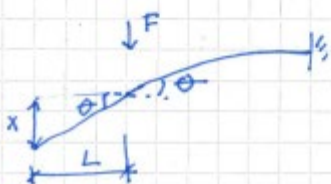
$$\delta_A = b + d = a + \theta_1 \cdot 0,6 + c + \theta_2 \cdot 2$$

$$\delta_A = 3,469 \cdot 10^{-3} + 1,779 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 + 8,394 \cdot 10^{-4} + 1,049 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 7,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 7,47 \text{ mm}$$

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = (1,779 + 1,049) \cdot 10^{-3} = 2,848 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,16^\circ$$

OBS!!!



$x = \theta \cdot L$ då θ är liten vid balkböjning



båglängd = $r \cdot \theta$ vertikala avståndet är lika båglängd vid små θ .

Sökt: a) δ_D b) θ_A

IPE 300 KB s. 65

$$\begin{cases} I_x = 8356 \text{ cm}^4 = 8356 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \\ E = 210 \text{ GPa} \\ EI = 17,55 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Anta en utböjningsform

$\delta_D = a - b$; $\theta_A = \theta_1 - \theta_2$

Fall 10 KB s. 30

$a = \theta_1 \cdot 1,2 = 0,0205 \cdot 1,2 = 24,6 \text{ mm}$

$$\theta_1 = \varphi_a = \left\{ \begin{matrix} Q = 40 \cdot 10^3 \cdot 6 \\ L = 6 \end{matrix} \right\} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{24 EI} = 0,0205$$

Fall 7 KB s. 29

$b = f = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2 \cdot 7,2}{3 EI} = 17,7 \text{ mm}$

$$\theta_2 = \varphi_b = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 6}{6 EI} = 6,154 \cdot 10^{-3}$$

$\delta_D = a - b = 24,6 - 17,7 = \underline{\underline{6,9 \text{ mm}}}$ \uparrow (antag rätt utböjningsform)

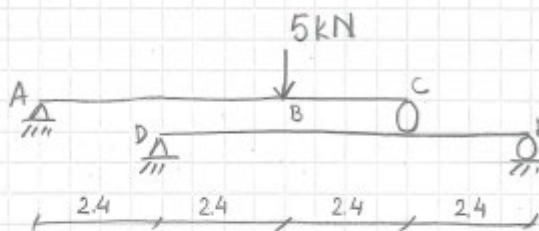
$\theta_A = 0,0205 - 6,154 \cdot 10^{-3} = 0,0143 \text{ rad} = \underline{\underline{0,82^\circ}}$

8.6

Balkböjning (superposition)

Sökt: δ_B

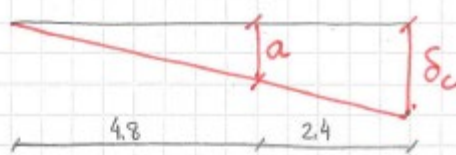
$$\begin{cases} E = 210 \text{ GPa} \\ I = 16,48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\ EI = 3,46 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Bestäm R_c

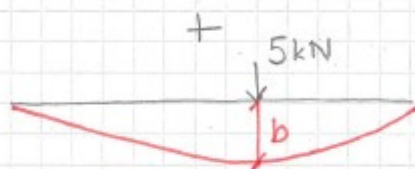
$$\sum \vec{M}_A: 5 \cdot 4,8 - R_c \cdot 7,2 = 0$$

$$R_c = 3,33 \text{ kN}$$

δ_B beror på hur mycket stödet C flyttas ner samt balkens böjning $\Rightarrow \delta_B = a + b$

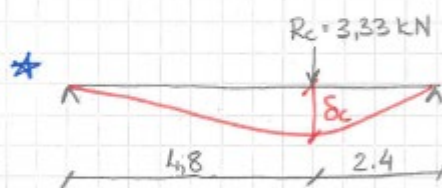
 Δ -likformighet \Rightarrow

$$\frac{a}{4,8} = \frac{\delta_c}{7,2} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \delta_c$$

 δ_c fås av balk DE *

Fall 6 KB s. 29

$$b = f = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 4,8^2 \cdot 2,4^2}{3 \cdot 3,46 \cdot 10^6 \cdot 7,2} = 8,879 \text{ mm}$$



Fall 6 KB s. 29

$$\delta_c = f = \frac{3,33 \cdot 10^3 \cdot 4,8^2 \cdot 2,4^2}{3 \cdot 3,46 \cdot 10^6 \cdot 7,2} = 5,913 \text{ mm}$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot \delta_c = \frac{2}{3} \cdot 5,913 = 3,942 \text{ mm}$$

$$\delta_B = 3,942 + 8,879 = \underline{\underline{12,821 \text{ mm}}}$$